

**Учебно-исследовательская лаборатория  
"Математические и программные технологии для  
современных компьютерных систем  
(Информационные технологии)"**

**Разработка и апробация  
образовательного комплекса  
"Модели и методы  
конечномерной оптимизации"**

**Пояснительная записка**

## Лист регистрации изменений

<i>Дата</i>	<i>Автор изменения</i>	<i>Номер версии</i>	<i>Комментарии</i>
14.05.03	Городецкий С.Ю.	1.0	Создание документа
20.05.03	Золотых Н.Ю.	1.0	Дополнения по 1-й части курса
21.05.03	Гришагин В.А.	1.0	Дополнения по 2-й части курса
22.05.03	Коган Д.И.	1.0	Дополнения по 3-й части курса
25.05.03	Городецкий С.Ю.	1.0	Дополнения по 2-й части курса, общая доработка документа

## **Авторский коллектив**

Руководитель (координатор проекта): к.ф.-м.н., доц. Городецкий С.Ю.

Зам. руководителя,

ответственный исполнитель: к.ф.-м.н., доц. Золотых Н.Ю.

Главные разработчики разделов 1,2 и 3

образовательного комплекса: д.ф.-м.н., проф. Шевченко В.Н,

к.ф.-м.н., доц. Гришагин В.А., д.ф.-м.н., проф. Коган Д.И.

## Содержание

Концепции и методы, представленные в общеобразовательном модуле .....	5
Обзор доступных образовательных модулей и учебных курсов по теме работы	7
Краткий обзор научных направлений, существующей учебной и научной литературы, основные исследователи и специалисты .....	9
Перечень крупных международных конференций по рассматриваемой тематике.....	14
Характеристика основных пользователей и сфера применения образовательного модуля .....	15
Список литературы .....	16

## Концепции и методы, представленные в общеобразовательном модуле

Разделы математики, современные вычислительные технологии и системы, связанные с решением задач оптимального выбора, необычайно обширны. Отчасти это связано с тем, что к задачам оптимизации или к серии таких задач сводятся более общие проблемы принятия оптимальных решений, а именно — проблемы рационального выбора, выбора в условиях конфликта, неопределенности или противодействия.

Разнообразие постановок исходных содержательных задач порождает множество различных по своим свойствам классов задач оптимизации: задачи линейного, квадратичного, динамического, математического программирования, многокритериальные, многоэкстремальные задачи со сложными нелинейными ограничениями. Особый класс составляют задачи целочисленного программирования и задачи оптимального выбора на графах, требующие специальных подходов, не характерных для задач других типов. Теория решения многих перечисленных выше классов задач продолжает в настоящее время интенсивно развиваться.

Разрабатываемый учебный комплекс претендует на достаточно широкое представление материала, как по многим классическим разделам методов конечномерной оптимизации, так по новым разработкам в этой области. Он включает концептуальные основы, теорию и современные технологии решения различных сложных непрерывных и дискретных задач, включая многоэкстремальные и многокритериальные задачи.

В нем можно выделить три основные части, отличающиеся постановками оптимизационных задач и используемым для их решения математическим аппаратом, но тесно взаимосвязанные в концептуальном плане.

Часть 1. Линейное и целочисленное линейное программирование

Часть 2. Нелинейное программирование, многокритериальная и многоэкстремальная оптимизация

Часть 3. Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация.

Задача линейного программирования (ЗЛП), представленная в 1-й части, заключается в максимизации линейной функции при линейных ограничениях. Теория линейного программирования содержит как *классические, сформировавшиеся разделы* (теория двойственности, алгоритм симплекс-метода, результат Хачияна о полиномиальной разрешимости задачи линейного программирования), так и *бурно развивающиеся разделы* (алгоритмы внутренней точки) и *открытые задачи* (вопрос о существовании полиномиальной модификации симплекс-метода). Теория линейного программирования развивалась в работах таких ученых, как Л. В. Канторович, Т. И. Купманс, Дж. Данциг, Ф. Л. Хичкок, Д. Б. Юдин, А. С. Немировский, Н. З. Шор, Л. Г. Хачиян. Одними из основных, широко используемых и развиваемых методов линейного программирования является *симплекс-метод*, предложенный Дж. Данцигом [1.8], и *метод внутренней точки*, предложенный Н. Кармаркаром. В курсе рассматривается *симплекс-метод, способы борьбы с заикливанием, теория двойственности*. В курсе также представлены основные результаты *классической теории линейных неравенств*, развитой в работах Ж. Б. Фурье, Дж. Фаркаша, Г. Минковского, А. Штейница, Г. Вейля, Т. С. Моцкина и др.

Задача *целочисленного линейного программирования* (ЗЦЛП) отличается от задачи линейного программирования дополнительным требованием целочисленности переменных. В отличие от ЗЛП ЗЦЛП является NP-полной задачей и поэтому, по-видимому, не может

быть решена за полиномиальное время. Для решения ЗЦЛП применяются *методы отсечений, ветвей и границ, алгоритмы динамического программирования, методы локального поиска, приближенные алгоритмы*. Методы отсечений, предложенные Дж. Данцигом и Р. Е. Гомори, рассмотрены в 1 части, динамическое программирование и методы ветвей и границ для нескольких классов задач дискретной многокритериальной оптимизации рассматривается в 3-й части образовательного комплекса. При разработке учебного материала по части 1 планируется использовать источники, указанные в [1.1–1.10]. Предполагается создание специальной программной лаборатории для исследования алгоритмов представленных в 1-й части.

Вторая часть образовательного комплекса посвящена методам решения общих задач математического программирования, включая многокритериальные и многоэкстремальные задачи с ограничениями. В этой области накоплено значительное количество результатов, полученных широким кругом специалистов [2.1–2.52]. С единых позиций рассматриваются как *классические результаты*, так и новые *фундаментальные результаты, полученные специалистами нижегородской школы* многоэкстремальной оптимизации.

Во второй части планируется семь разделов. В первом разделе рассматривается соотношение между задачами рационального и оптимального выбора и примеры прикладных задач. Вводится понятие решений по Парето и Слейтеру, а также разбираются различные подходы к отысканию этих решений. Изучаются важные для дальнейшего классы функций и их свойства.

Во втором разделе рассматриваются теоретические основы аналитического решения задач оптимального выбора. Здесь дается *обобщение классических результатов по теории условий оптимальности на многокритериальные задачи*. Кроме того, для случая общих однокритериальных задач изучаются элементы теории двойственности применительно к выпуклым и общим задачам, а также схемы вытекающих из них вычислительных алгоритмов для задач с ограничениями.

Третий раздел специально посвящен *общим методам учета функциональных ограничений*. В нем, кроме метода внешнего штрафа, рассмотрены концепции метода модифицированных функций Лагранжа, а также несколько методов параметризации, в частности *обобщение индексной схемы Маркина–Стронгина* [2.19].

Разделы с четвертого по шестой значительно опираются на *результаты нижегородской школы* по многоэкстремальной оптимизации. В первом из них рассмотрены математические основы построения алгоритмов, исходя из принципов оптимальности. Общеуниверсальную основу для этого материала дают концепции теории оптимального выбора, основанные на принципах наилучшего гарантированного результата (смотри, например, Гермейер Ю.Б. [2.29], Сухарев А.Г. [2.13], Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. [2.14]), а также наилучшего среднего результата (см., например, Грень [2.36], Де Гроот М. [2.37]), выполняется анализ их свойств исходя из *теории характеристической представимости и T-представимости*. В пятом разделе разбираются *фундаментальные результаты по редукции размерности* в многомерных задачах, приводятся основанные на них алгоритмы решения однокритериальных многоэкстремальных многомерных задач с ограничениями. Эти оригинальные результаты составят основу тем лабораторных практикумов по этому разделу. В шестом разделе рассматриваются методы *одновременного оценивания всего множества точек, оптимальных по Парето или Слейтеру* на примере липшицевых задач в частности скаляризатор Стронгина–Маркина.

Седьмой раздел части 2 связан с моделями и методами *эффективного локального уточнения* найденных оценок решения и является необходимым дополнением к материалу предыдущих разделов, позволяющим получать окончательные решения в задачах оптимального выбора. Материал этого раздела включает специальные *эффективные*

алгоритмы решения выпуклых гладких задач (метод центров тяжести, метод эллипсоидов [2.37]), а также эффективные вычислительные схемы для общих задач локальной оптимизации (методы траекторного типа). Изучаются также *специальные методы учета линейных ограничений* при локальной оптимизации. Методы локальной оптимизации траекторного типа представлены в курсе с *общих позиций выбираемой локальной модели* задачи. Стратегии локального поиска порождаются как следствие принятой модели.

Учебные лабораторные практикумы по локальной оптимизации ориентированы на максимальную визуализацию поведения локальных вычислительных методов на задачах разной структуры.

Особый класс составляют задачи дискретной оптимизации, в частности — целочисленного программирования и оптимального выбора на графах, требующие специальных подходов, не характерных для задач других типов. Теория решения многих перечисленных выше классов задач в настоящее время продолжает интенсивно развиваться.

Третья часть образовательного комплекса посвящена изучению *моделей и методов дискретной оптимизации*, включая *дискретную многокритериальную оптимизацию*. Основное внимание уделяется изложению технологии динамического программирования; при этом излагается как классическая теория Р. Беллмана, так и способы построения модифицированных рекуррентных соотношений, ориентированных на многокритериальные задачи. Модифицированные соотношения позволяют синтезировать для решаемой многокритериальной задачи *полную совокупность эффективных оценок* с одновременным обеспечением возможности определения по любой выбранной эффективной оценке Парето - оптимального решения, эту оценку порождающего. Все описываемые схемы решения применяются к конкретным классам задач. В числе рассматриваемых - *классические задачи дискретной оптимизации* в однокритериальных и многокритериальных постановках (задачи коммивояжера, задачи о ранце, задачи о назначениях и т.д.), а также *задачи теории расписаний*. Классические результаты представлены в монографиях [3.1-3.3] и учебной литературе (например, [3.4-3.6]) . Результаты, касающиеся применения идеологии динамического программирования в процессах решения многокритериальных задач, получены относительно недавно и изложены только в научной периодике и сборниках статей. Рассматриваются также *вопросы вычислительной сложности* задач и алгоритмов и подходы к синтезу *качественных решений труднорешаемых задач за реально приемлемое время*, соответствующая теория частично изложена в [3.7-3.8].

## **Обзор доступных образовательных модулей и учебных курсов по теме работы**

Учебный материал по методам конечномерной оптимизации включен в стандартные образовательные программы ВУЗов по многим специальностям математического и естественнонаучного профиля. Обычно он бывает распределен по нескольким курсам, которые включают только основной базовый классический материал.

Доступных образовательных модулей, которые охватывали весь спектр задач и имели бы системы компьютерной поддержки, — практически нет. Имеется незначительное количество подобных разработок, но они относятся к какому либо одному подклассу задач. Ниже приводится информация по системам компьютерной поддержки для непрерывных конечномерных задач.

В Марийском государственном университете имеется достаточно давно выполненная программная разработка на основе оптимизационной диалоговой системы «Одис»

(Ижуткин В.С., Сушенцов А.А.), используемая для поддержки учебного курса методов оптимизации и включающая набор методов нелинейной оптимизации.

Ряд ВУЗов обладают небольшими программными разработками, созданными в начале 90-х годов под операционную систему MS-DOS и обычно имеющими весьма узкую направленность. Например, в Таганрогском радиотехническом институте имеется разработка, выполненная около десяти лет назад для использования по MS-DOS, представляющая (по данным авторов) *компьютерный учебник* по вопросам принятия оптимальных решений «*Методы оптимизации*», используемый для ряда специальностей. В действительности, кроме общих вопросов, постановок и классификации оптимизационных задач он включает только методы линейного и динамического программирования, выполненные в демонстрационном варианте. *Учебными программными системами* под MS-DOS по методам линейного программирования, локальной оптимизации, а также задачам оптимизации на графах располагает Нижегородский государственный университет.

Имеются системы иного типа. Развитой программной разработкой является учебный комплекс *системы КАДИС по методам оптимального проектирования* в машиностроении. Система КАДИС включает несколько десятков учебных комплексов по разным учебным дисциплинам. Одним из них является комплекс ОПТИМИЗАЦИЯ. Он предназначен для поддержки курсов по САПР. Состоит из учебного пособия, автоматизированного учебного курса и тренажера. Тренажер комплекса Оптимизация предназначен для практического освоения с помощью компьютера методов оптимизации. В качестве решаемых оптимизационных задач используются содержательные задачи, возникающие при размещении опор под нагруженной балкой. При этом возникают задачи с нелинейной функцией цели, многоэкстремальностью и наличием «оврагов». В состав пакета программ оптимизации входят 6 алгоритмов: сканирование по сетке, случайный поиск по методу Монте-Карло, покоординатная оптимизация, градиентный метод в форме наискорейшего спуска, метод конфигураций Хука-Дживса и метод деформируемого многогранника Нелдера-Мида.

Таким образом, данный комплекс не включает учебного материала по эффективным методам локальной оптимизации первого порядка, а также по современным методам многоэкстремальной оптимизации. Он ориентирован на изучение не столько самих методов оптимизации, сколько на их применение в прикладных задачах САПР.

В настоящее время в стадии разработки продолжает находиться *дистанционный курс обучения «Методы оптимизации»* (Сумский государственный университет, разработчики Любчак В.А., Остривная Л.Г., Пероганич Е.Н.). Курс ориентирован на освоение методов локальной оптимизации при выполнении компьютерных лабораторных практикумов, а также использование реализующей эти методы библиотеки MULTID. Лабораторные практикумы включают следующие темы: решение задач одномерной локальной оптимизации, задач многомерной локальной оптимизации методами нулевого порядка и первого порядка (методами наискорейшего градиентного спуска и сопряженных градиентов). В этой системе вообще не рассматривается важная проблема оптимизации: поиск глобального экстремума.

Наконец, следует указать на программные системы поддержки принятия оптимальных решений не являющиеся чисто учебными, но которые могут ограниченно использоваться в этих целях. Примером такой системы является разработанный в ВЦ АН РФ под руководством Потапова М.А. *пакет КОМПРОМИСС*, включающий набор методов нелинейной локальной оптимизации, общие методы учета ограничений и методы адаптивных покрытий для многоэкстремальной оптимизации, основанные на работах Евтушенко Ю.Г. Более гибкие и эффективные вычислительные методы многоэкстремальной оптимизации в этот пакет не включены. Кроме того, пакет не поддерживает учебную визуализацию структуры решаемой задачи.



Новые разработки в рассматриваемой области появились полтора года назад в ННГУ в результате выполнения работ по разработке образовательного комплекса «Современные методы принятия оптимальных решений». В рамках этого комплекса создан электронный учебник и программные лаборатории по одномерной и многомерной многоэкстремальной непрерывной оптимизации и локальной оптимизации при ограничениях. Эта разработка является одним из заделов авторского коллектива по предлагаемому новому учебному комплексу.

## **Краткий обзор научных направлений, существующей учебной и научной литературы, основные исследователи и специалисты**

В области вычислительных методов решения задач оптимального выбора в настоящее время уже получены основные важные теоретические результаты, разработаны методы, изданы монографии и учебники. В тоже время, остаются задачи, исследования в которых не завершены или же завершены сравнительно недавно. Часть результатов по ним представлена в оригинальных монографиях, а часть доступна только через публикации в научных журналах.

В приведенном ниже кратком обзоре научных направлений будут указаны как *классические*, так и *развивающиеся в настоящее время направления*, но большее внимание будет уделено последним. В обзор не включены направления, связанные с некоторыми специальными классами задач, например, квадратичными, однако задачи линейного программирования рассматриваются.

Задачи *линейного программирования* (ЗЛП) заключаются в максимизации линейной функции при линейных ограничениях. Теория линейного программирования содержит как классические, сформировавшиеся разделы (теория двойственности, алгоритм симплекс-метода, результат Хачияна о полиномиальной разрешимости задачи линейного программирования), так и бурно развивающиеся разделы (алгоритмы внутренней точки) и открытые задачи (вопрос о существовании полиномиальной модификации симплекс-метода). Теория линейного программирования развивалась в работах таких ученых, как Л. В. Канторович, Т. И. Купманс, Дж. Данциг, Ф. Л. Хичкок, Д. Б. Юдин, А. С. Немировский, Н. З. Шор, Л. Г. Хачиян. Одними из основных, широко используемых и развиваемых методов линейного программирования является симплекс-метод, предложенный Дж. Данцигом, и метод внутренней точки, предложенный Н. Кармаркаром. Линейное программирование связано с классической теорией линейных неравенств, развитой в работах Ж. Б. Фурье, Дж. Фаркаша, Г. Минковского, А. Штейница, Г. Вейля, Т. С. Моцкина и др.

Задача *целочисленного линейного программирования* (ЗЦЛП) отличается от задачи линейного программирования дополнительным требованием целочисленности переменных. В отличие от ЗЛП ЗЦЛП является NP-полной задачей и поэтому, по-видимому, не может быть решена за полиномиальное время. Для решения ЗЦЛП применяются методы отсечений, ветвей и границ, алгоритмы динамического программирования, методы локального поиска, приближенные алгоритмы.

Значительное внимание в курсе уделяется *задачам оптимального выбора достаточно общего вида*, включая многокритериальность. В теории оптимизации для таких задач представлено два направления: с одной стороны, исследования по аналитическим условиям оптимальности и теории двойственности, с другой — разработка теории вычислительных методов и построение алгоритмов решения экстремальных задач.

В области аналитических условий оптимальности последние результаты связаны с *обобщением классических условий экстремума на многокритериальные задачи*. Результаты исследований ряда авторов по этому вопросу представлены, например, в научной монографии Подиновского В.В., Ногина В.Д. [2.4]. В переработанном виде наиболее важные из них планируется включить в учебный курс. Также планируется представить результаты по *теории двойственности* для общих однокритериальных задач.

В области вычислительных методов один из наиболее завершенных разделов образуют *методы локальной оптимизации без ограничений*. Сюда относятся классические результаты по методам прямого поиска Нелдера и Мида (1965 г.), Хука и Дживса (1961 г.), результаты по обширной группе методов, основанных на квадратичных моделях поведения оптимизируемых функций. Здесь можно назвать работы периода 1965-1972 гг. Бройдена С., Флетгера Р., Пауэлла М., Шанно Д., Гольфарба Д., Давидона С., Ривса С., Данилина Ю.М., Поляка Б.Т., Пшеничного Б.Н., Шора Н.З. и других авторов. Результаты отражены во многих монографиях [2.5, 2.10, 2.12, 2.16, 2.42] и учебниках [2.1, 2.2, 2.7, 2.40, 2.41].

Результаты этого раздела широко опираются на методы математического анализа и линейной алгебры. Разработанные методы обобщаются на задачи с простыми линейными ограничениями.

Классический материал по этому разделу дополнен в разрабатываемом учебном курсе результатами по методам эффективного решения задач выпуклого математического программирования (результаты Немировского А.С., Юдина Д.Б. [2.37], Шора Н.З.), основанным на использовании квазиоптимальных отсечений.

Следующее направление, породившее в 60-х, 70-х годах значительное количество работ, связано с *общими и специальными методами учета нелинейных ограничений* в задачах оптимального выбора. Общие методы основываются на использовании штрафных и барьерных функций, модифицированных функций Лагранжа, а также метода внутренней точки и параметризации целевой функции (последняя группа методов приведена в [2.1, 2.2, 2.17]). При этих подходах задача со сложными ограничениями трансформируется в последовательность вспомогательных задач без таких ограничений с применением к ним известных методов безусловной оптимизации. Однако, возникающие вспомогательные задачи обычно имеют плохую структуру. Поэтому представляют интерес методы иного типа. Здесь большее количество исследований было посвящено попыткам построения специальных методов локальной оптимизации с учетом ограничений (результаты этих исследований достаточно полно отражены в литературе, например, в монографиях [2.3, 2.5, 2.6, 2.16, 2.17, 2.28, 2.42, 2.43] и учебниках [2.1, 2.2, 2.7, 2.40] ). Относительно новое направление по учету ограничений связано с задачами многоэкстремальной оптимизации и основано на использовании специальных моделей функций ограничений, или на построении семейств вспомогательных задач, не включающих настраиваемых параметров типа коэффициента штрафа. Значительные результаты принадлежат здесь специалистам нижегородской школы, например [2.8, 2.9, 2.34, 2.35, ]. Эти результаты планируется включить в учебный курс.

Важное место занимают вопросы регуляризации решения некорректных задач и *метод регуляризации*, предложенный Тихоновым А.Н. [2.44]. Однако данный материал не нашел отражения в курсе.

Значительная часть упомянутых методов локального поиска формирует направления локального убывания функции и выполняет смещение вдоль них, используя *специальные процедуры одномерной локальной оптимизации*. Многократное повторение этих процедур требует их оптимизации. Здесь широко используются результаты теории построения

оптимальных алгоритмов [2.13, 2.14]. В учебной литературе эти вопросы освещены, например, в [2.2, 2.10, 2.40, 2.41].

Особое место занимают научные *исследования в области многоэкстремальной оптимизации*. Поскольку глобальный экстремум является интегральной характеристикой функций задачи в области поиска, его определение связано, в общем случае, с построением покрытия области точками испытаний.

Применяемые подходы существенно зависят от имеющейся априорной информации о задаче и затрат, связанных с однократным вычислением функций задачи. Все методы приводят к явному или неявному построению покрытий области. Простейшие методы решения связаны с применением *неадаптивных случайных или детерминированных равномерных покрытий*. Интересные решения задач о построении равномерных регулярных многомерных решеток связаны с работами Соболя И.М. [2.26], пионерские работы по применению стохастического подхода принадлежат Растригину Л.А. [2.45, 2.46] Разнообразные результаты по глобальному случайному поиску представлены в монографии Жиглявского А.А. [2.47]. Оригинальный подход на основе стохастического оценивания меры областей со значениями минимизируемой функции меньшими некоторых пороговых значений представлен в монографии Чичинадзе В.К. [2.48]. Все эти подходы почти не используют априорную информацию о решаемой задаче и обычно требуют большого объема вычислений для достоверного оценивания решения.

Альтернативное направление научных исследований основано на *оптимальном планировании размещения точек испытаний* с использованием имеющейся априорной, а также получаемой в ходе поиска информации о решаемой задаче. В основе этого направления лежит понятие модели решаемой задачи. Метод решения строится как оптимальное, в том или ином смысле, решающее правило в рамках подходов теории игр и оптимальных статистических решений.

Исследованием вопросов построения подобных вычислительных процедур занимались Кушнер Х., Неймарк Ю.И., Стронгин Р.Г., Сухарев А.Г., Евтушенко Ю.Г., Моцкус Й.Б., Шалтянис В.Р., Жилинскас А.Г., Пиявский А.С., Хансен П., Пинтер Дж., Пардалос П.М., Хорст Р. и многие другие исследователи, входящие в состав связанных с этими работами научных школ.

Методы, разрабатываемые в рамках этого направления, порождают *неравномерные адаптивные покрытия области поиска* точками измерений, существенно более плотные в окрестностях решения. Многие признанные результаты в этой области принадлежат Нижегородской школе глобальной оптимизации.

Большинство методов, в рамках данного подхода, строится как одношагово-оптимальные правила. При этом используются либо гарантирующие модели поведения, основанные на построении минорант функций задачи (Евтушенко Ю.Г., Пиявский А.С., Хансен П., Пинтер Дж.), либо вероятностные модели поведения, когда функция рассматривается как реализация некоторого случайного процесса или представитель случайного семейства (Кушнер Х., Неймарк Ю.И., Стронгин Р.Г., Моцкус Й.Б., Шалтянис В.Р., Жилинскас А.Г.), либо же используются аксиоматические модели функции (Жилинскас А.Г. [2.49]).

Наиболее полные результаты получены в одномерных задачах многоэкстремальной оптимизации. Для указанного класса методов глобальной оптимизации получены *новые результаты для задач с ограничениями*. В рамках информационно-статистического метода, предложенного Р.Г.Стронгиным, разработан *эффективный индексный алгоритм учета ограничений* (результат получен Маркиным Д.Л.) [2.35]. Индексный метод обладает рядом

преимуществ по сравнению с традиционными методами: не использует штрафных добавок, не требует подбора коэффициентов типа констант штрафа и решения последовательностей безусловных подзадач, допускает частичную вычислимость целевой функции и ограничений.

Более сложным является построение одношагово-оптимальных процедур глобальной оптимизации для многомерных задач. В настоящее время развивается несколько направлений. Первое основано на *редукции размерности задачи*. При одном из подходов многомерная задача сводится к серии вложенных одномерных задач (*многошаговая схема редукции размерности* [2.34]). Остальные подходы, разработанные в рамках информационно-статистических алгоритмов, используют *отображение многомерной области на отрезок с помощью разверток* [2.25] на основе аппроксимаций кривых Пеано [2.8, 2.19]. Последние результаты в этой области получены Р.Г.Стронгиным и связаны с *применением множественных разверток* [2.9], позволяющих более точно передать близость точек измерений в многомерном пространстве при его отображении на отрезок.

Другое направление, названное “*divide the best*” основано на *адаптивном разбиении области поиска на подобласти - компоненты простой структуры*, обычно – параллелепипеды [2.30, 2.52]. Для каждой подобласти учитываются только выполненные в ней измерения функций задачи, что упрощает получение оценок поведения функции в каждой такой компоненте. На основе этих оценок компоненте приписывается приоритет. На каждой итерации наиболее приоритетная компонента разделяется на несколько новых с проведением в них дополнительных вычислений функции. В настоящее время в рамках этого направления разрабатываются новые типы методов [2.31, 2.27].

Еще одним направлением исследований является *учет различной информации, получаемой о функции в результате измерения*, например, градиента, а также распространение разработанных методов на новые классы функций. Следует также отметить исследования в области применения *интервальной арифметики* [2.55].

Имеются относительно новые результаты, связанные с решением сложных *многокритериальных задач*. Наличие нескольких критериев [2.53] приводит к изменению понятия решения, которое теперь понимается в смысле решения по Парето [2.4]. Известные методы сверток [2.4] не позволяют одновременно оценивать это множество в целом. Один из последних результатов в этой области состоит в том, что удалось построить задачу со скалярным перестраиваемым критерием, минимизация которого приводит к *оцениванию сразу всего множества Парето*. Этот результат получен в работе Р.Г. Стронгина [2.20]. Близкие результаты есть у других авторов [2.54, 2.36]. Этот материал также включен в образовательный курс.

Интенсивные исследования проводились в области *параллельной глобальной оптимизации* применительно к классу информационно-статистических алгоритмов. Результаты представлены в [2.9, 2.50]. В учебный курс эта тематика не включается.

Переходя к обзору результатов и работ по третьей части курса, отметим, что для дискретных оптимизационных задач *метод динамического программирования* является одним из основных. Базисом метода служит чрезвычайно просто формулируемый принцип Р. Беллмана. Широкие возможности применения метода динамического программирования для решения задач дискретной оптимизации были показаны уже в первой монографии Р. Беллмана [3.1]. Далее последовали дополняющие ее работы [3.2–3.3]. Несколько позднее появилась книга Р. Ариса [3.9], специально посвященная задачам *дискретного динамического программирования*. Кроме того, следует отметить монографию Р.Ховарда [3.10], породившую новое, посвященное *дискретно управляемым марковским процессам*, направление исследований. В 80-ых годах XX века появились работы Д. Клейна, М. Хенига,

Р. Хартли и др., посвященные *проблемам применимости метода динамического программирования для решения задач многокритериальной оптимизации* (см., например, [3.11 - 3.13]); при этом под решением многокритериальной задачи, как правило, понимается синтез для нее полной совокупности эффективных оценок с одновременным обеспечением возможности построения по любой выбранной эффективной оценке Парето - оптимального решения, эту оценку порождающего. Результаты выполненных в Нижегородском университете исследований по задачам дискретной многокритериальной оптимизации и применению для их решения метода динамического программирования отражены в работах Батищева Д.И., Когана Д.И. и др.[3.14-3.18]

Как правило, во всех публикациях, где метод динамического программирования применяется к решению дискретных оптимизационных задач, реализуется вывод основанных на принципе Беллмана рекуррентных соотношений, выполняется исследование их свойств. Особое внимание уделяется *вопросам вычислительной сложности задач и алгоритмов*. Соответствующая теория развита работами Р. Карпа, С. Кука, А. Левина, Р. Гэри, Д. Джонсона и многих других [3.19- 3.22]. Вопросы вычислительной сложности задач теории расписаний являются центральными в двухтомной монографии В.С. Танаева и его учеников [3.23 - 3.24]. При реализации вычислений по рекуррентным соотношениям динамического программирования трудоемкость счета в лучшем случае прямо пропорциональна числу состояний вводимой для записи этих соотношений дискретно управляемой системы, в то время как зависимость числа состояний системы от размерности решаемой задачи чаще всего оказывается экспоненциальной. В такой ситуации особое значение приобретают *комбинированные методы, сочетающие в себе идеологию как метода динамического программирования, так и схемы ветвей и границ*. Получаемые оценки дают возможность сокращения времени счета по рекуррентным соотношениям за счет объявления отдельных подмножеств состояний системы заведомо бесперспективными (оптимальная траектория через такие состояния не проходит). Вопросы *совместного применения методов динамического программирования и ветвей и границ* достаточно подробно рассмотрены в монографии Алексева О.Г. [3.25]. В той же монографии изложена методология *встречного решения уравнений динамического программирования*, что также способствует сокращению времени счета.

В связи с *труднорешаемостью* [3.22] большинства важных в теоретическом и прикладном аспекте задач дискретной оптимизации существенную роль приобретают проблемы синтеза достаточно качественных решений в реально приемлемом времени. *Создание методов приближенного решения труднорешаемых задач* является областью очень активных исследований (Сахни С., Гонсалес Т., Финкельштейн Ю.Ю. , Сигал И.Х., Гэри Г., Джонсон Д., Ленстра Д., Lawler E. и др. ). Здесь получен ряд впечатляющих результатов (см., например, монографии Ю.Ю. Финкельштейна [3.7], Х. Пападимитриу и К. Стайглица[3.8]). В то же время пока нельзя сказать, что построена соответствующая общая теория. Следует также отметить, что проблема нахождения решения, обеспечивающего заданную степень приближения к оптимуму, для большинства труднорешаемых задач оказывается также труднорешаемой. Актуальным является вопрос построения для важных в прикладном отношении частных классов задач *эвристических решающих алгоритмов*. Для многокритериальных задач в связи со значительной вычислительной сложностью проблемы синтеза полной совокупности эффективных оценок важны вопросы построения достаточно представительных (в том либо ином смысле) подмножеств таких оценок.

Основные отмеченные подходы, результаты и направления планируется представить в учебном курсе.

Таким образом можно отметить, что центральную часть разрабатываемого образовательного модуля будут составлять как классические, так и новые результаты в

области методов решения экстремальных задач различных типов. Многие оригинальные результаты, которые планируется включить в образовательный модуль, принадлежат нижегородской школе в области оптимизации.

## Перечень крупных международных конференций по рассматриваемой тематике

О важности и востребованности методов принятия оптимальных решений в значительной степени говорит тот факт, что тематика многих крупных международных конференций проходивших в последние годы, либо была полностью посвящена проблемам оптимизации, либо включала их.

В приведенном ниже перечне за пять последних лет не включены конференции и симпозиумы типа “European Conference on Operational Research” (2000,1998), International Conference on Operations Research (1998) или “Symposium on Operations Research” (2001,2000,1999,1997,1996), посвященные общим вопросам исследования операций.

Перечень конференций.

Одна из крупнейших Российских конференций, посвященных математическому программированию — Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения» (1997, 2000, 2003, Екатеринбург) — посвящена всем разделам математического программирования, в том числе приложениям, дискретной оптимизации, теории оптимального управления.

На крупнейшей международной конференции *IPCO (Integer Programming and Combinatorial Optimization)* (ежегодная, организатор – *Mathematical Programming Society*) представлены последние достижения во всех областях дискретной оптимизации: методах отсечений, методах ветвей и границ, вычислительной биологии, вычислительной геометрии, геометрии чисел, алгоритмах на графах и сетях, полиэдральной комбинаторике.

*Sixth SIAM Conference on Optimization*, (1999, Atlanta, GA, USA; 1996, British Columbia, Canada). Посвящена широкому спектру вопросов теории оптимизации и ее приложениям.

*18-16th International Symposium on Mathematical Programming*, (2003, Copenhagen, Denmark; 2000, Atlanta, Georgia, USA; 1997).

*International Conference on Optimization*, (1999, Trier, Germany). Была посвящена вопросам непрерывной, дискретной и стохастической оптимизации.

*20-18th IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization*, (2001, Trier, Germany; 1999, Cambridge, England; 1997) На последней конференции в рамках минисимпозиума были представлены доклады по применению статистических подходов к глобальной оптимизации, а также по параллельной глобальной оптимизации.

*International Conference on Approximation and Optimization in the Caribbean*, (2001,Guatemala; 1999,Guadeloupe; 1997, Venezuela; 1995,Mexico и др.). Ее тематика включает вопросы непрерывной параметрической оптимизации, стохастической и глобальной оптимизации.

*International Conference on Parametric Optimization and Related Topics*, (1999, Dubrovnik, Croatia; 1997, Tokyo; а также 1985, 1989, 1995, 1991, 1989, 1985), посвящается широкому кругу вопросов, включая применение стохастической и глобальной оптимизации в приложениях.

*International Conference on Optimization and Optimal Control*, (2001, Tainan, Taiwan; 1997). На последней конференции среди многих других тем представлены: *нелинейное математическое программирование и многоэкстремальная оптимизация*.

*Applied Mathematical Programming and Modelling*, (2000, Brunel University, Uxbridge, GB). Представительная конференция, в значительной степени посвященная *применениям математического программирования*.

*IFAC 15th WORLD CONGRESS* (2002, Barcelona, Spain). Многоцелевой научный конгресс, одним из основных направлений которого являлась проблематика *многокритериальной оптимизации и нелинейного программирования*.

Следует упомянуть отдельную конференцию, посвященную памяти С. Каратеадори (1873-1950) “*Advances in Convex Analysis and Global Optimization*”(2000, Pythagorion, Samos, Greece) – один из организаторов: P.Pardalos.

Вопросам применения интервальных методов были посвящены следующие конференции:

“*International Conference on Interval Methods and their Application in Global Optimization*” (INTERVAL '98), (1998, Nanjing, China)

*Interval2000: International Conference on Interval Methods in Science and Engineering* (2000, Karlsruhe, Germany).

По тематике дискретной оптимизации, теории сложности регулярно проводятся крупные международные конференции и симпозиумы. Ниже перечислены некоторые из них.

*International Symposium on Combinatorial Optimization, April 8-10, 2002, Paris, France.* – важный международный симпозиум, посвященный задачам дискретной оптимизации.

IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, November 16-19, 2002, Vancouver, Canada – важный и представительный симпозиум, где значительное внимание уделяется проблемам построения эффективных алгоритмов решения дискретных оптимизационных задач.

Кроме того, можно указать на *9-th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, May 27 - 29, 2002, M.I.T., Cambridge, USA*, а также *10-th European Symposium on Algorithms, September, 2002, Rome, Italy*.

*5-th Conference on Algorithms and Complexity, May 28-30, 2003, Rome, Italy* — предстоящая конференция, специально посвященная проблемам вычислительной сложности задач и алгоритмов.

## **Характеристика основных пользователей и сфера применения образовательного модуля**

Образовательный комплекс по методам конечномерной оптимизации ориентирован на пользователей нескольких категорий.

В первую очередь, это талантливая студенческая молодежь физико-математических специальностей. Для этой категории пользователей учебно-методическая направленность курса характеризуется продолжением и углублением фундаментального образования в области математических моделей, методов и вычислительной поддержки процессов принятия оптимальных решений, а также глубоким практическим освоением наиболее важных результатов в этой области через специальные лабораторные практикумы, которые

позволят лучше овладеть алгоритмами и усвоить теорию за счет проведения вычислительных экспериментов.

Высокоэффективного использования учебного комплекса следует ожидать по отношению к категориям квалифицированных пользователей: преподавателей и специалистов с достаточной математической подготовкой, уже имеющих опыт использования оптимизационных подходов. Основной образовательный эффект для этой категории будет достигнут за счет получения адекватных системных представлений о математических моделях, классических, а также современных высокотехнологичных методах, применимых в сложных ситуациях оптимального выбора.

Основной сферой применения образовательного комплекса является подготовка молодых высококвалифицированных кадров, а также переподготовка специалистов и преподавателей ВУЗов в области математических моделей, современных методов и программных средств решения оптимизационных задач.

## Список литературы

*К части 1 «Линейное и целочисленное линейное программирование»*

- 1.1. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. – М.: Мир, 1991.
- 1.2. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974.
- 1.3. Шевченко В.Н. Линейное и целочисленное линейное программирование / Уч. пособие. – Горький, 1976.
- 1.4. Шевченко В.Н. Линейное программирование и теория линейных неравенств / Уч. пособие. – Горький, 1977.
- 1.5. Шевченко В.Н. Множества целочисленных решений квадратной системы линейных неравенств / Уч. пособие. – Горький, 1983.
- 1.6. Шевченко В.Н. Качественные вопросы целочисленного линейного программирования. – М.: Физматлит, 1995.
- 1.7. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). – М.: Физматгиз, 1961.
- 1.8. Данциг Дж. Линейное программирование. Его применения и обобщения – М.: Прогресс, 1966.
- 1.9. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. – М.: Факториал, 1998.
- 1.10. Шевченко В. Н. Линейное программирование: история, достижения, проблемы // Вестник ННГУ. Математическое моделирование. – Нижний Новгород, 2003 (в печати)

*К части 2 «Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация»*

- 2.1. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.:Наука,1986.
- 2.2. Карманов В.Г. Математическое программирование. –М.:Наука, 1986.



- 2.3. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. -М.: Мир, 1982.
- 2.4. Подиновский В.В, Ногин В.Д. Парето–оптимальные решения многокритериальных задач.–М.: Наука, 1982
- 2.5. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация.–М.: Мир, 1985.
- 2.6. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа.–М.: Радио и связь, 1987
- 2.7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. –М.:Наука, 1982.
- 2.8. Стронгин Р.Г. Численные методы многоэкстремальной оптимизации (информационно–статистические алгоритмы) –М.:Наука, 1978.
- 2.9. Strongin R.G., Sergeev Ya.D. Global Optimization with Non–Convex Constraints. Sequential and Parallel Algorithms.– Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. The Netherlands, 2000/
- 2.10. Уайлд Д.Дж. Методы поиска экстремума. 1967
- 2.11. Аоки М. Введение в методы оптимизации.–М.:Наука, 1977.
- 2.12. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. –М.:Мир, 1975.
- 2.13. Сухарев А.Г. Оптимальный поиск экстремума. – М.: Изд МГУ, 1975.
- 2.14. Черноусько Ф.Л., Меликян. Игровые задачи управления и поиска.–М.: Наука, 1978
- 2.15. Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума.–М.: Наука, 1991
- 2.16. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах.– М.: Наука, 1975.
- 2.17. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. –М.:Наука, 1982.
- 2.18. Евтушенко Ю.Г., Потапов М.А. Методы численного решения многокритериальных задач.–ДАН, 1986,т.28, N 11.
- 2.19. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума. –М.:Знание,1990.
- 2.20. Маркин Д.Л., Стронгин Р.Г. О равномерной оценке множества слабоэффективных точек в многоэкстремальных многокритериальных задачах оптимизации.// ЖВМиМФ. 1993,т.33, N 2.
- 2.21. Strongin R.G., Sergeyev Ya.D., Grishagin V.A. Parallel Characteristical Algorithms for Solving Problems of Global Optimization // Journal of Global Optimization,10, 1997, pp. 185-206.
- 2.22. Методы поиска глобального экстремума. Методические указания./ Сост. Городецкий С.Ю.– Горький:, ГГУ, 1990.
- 2.23. Городецкий С.Ю. Сходимость и асимптотические оценки поведения для одного класса методов поиска. // Динамика систем. Динамика и управление. Горький: ГГУ, 1984.

- 2.24. Городецкий С.Ю. Метод поиска условного глобального минимума, основанный на простых вероятностных моделях минимизируемой функции и функций ограничений.// Динамика систем. Управление и оптимизация. Горький: ГГУ, 1987.
- 2.25. Лузин Н.Н. Теория функций действительного переменного. — М.: Учпедгиз, 1948.
- 2.26. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. — М.: Наука, 1981.
- 2.27. Городецкий С.Ю. Многоэкстремальная оптимизация на основе триангуляции области.// Математическое моделирование и оптимальное управление. Вестник Нижегородского государственного университета. Вып. 2(21). Н.Новгород: изд-во ННГУ, 1999, с.249–269.
- 2.28. Батищев Д.И. Поиск методы оптимального проектирования. М.: Советское радио, 1975.
- 2.29. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
- 2.30. Pinter J. Global optimization in Action. –Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. The Netherlands, 1996.
- 2.31. Sergeyev Ya.D. On Convergence of "Divide the Best" Global Optimization Algorithms. – Optimization, Vol.44, 1998, pp.303-325.
- 2.32. Пиявский С.А. Один алгоритм отыскания абсолютного минимума функции.-ЖВМ и МФ, №4, 1972, с.888-896.
- 2.33. Kushner H. A New Method of Locating the Maximum Point of an Arbitrary Multipipeak Curve in the Presence of Noise. – Transactions ASME, Ser. D, J. Basic Eng., 1964, vol.86, No.1, p.97-106.
- 2.34. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Городецкий С.Ю., Гришагин В.А., Маркина М.В. Современные методы принятия оптимальных решений. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002.
- 2.35. Стронгин Р.Г., Маркин Д.Л. Минимизация многоэкстремальных функций при невыпуклых ограничениях.// Кибернетика №4, 1986, с.64-69.
- 2.36. Городецкий С.Ю. Методы поиска множества решений многокритериальных задач на основе простых вероятностных моделей критериев. ННГУ, Н.Новгород, 1992. — Деп. в ВИНТИ 25.03.92, № 1024–В92, 18 с.
- 2.37. А.С.Немировский, Д.Б.Юдин Сложность задач и эффективность методов оптимизации. – М.: Наука, 1979.
- 2.38. Грень Е. Статистические игры и их применение. –М.: Статистика, 1975. –176 с.
- 2.39. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. –М.: Мир, 1974. –492 с.
- 2.40. Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М.. Методы оптимизации. –М.: Наука, 1978. –350 с.
- 2.41. Габасев Р. Кириллова Ф. Методы оптимизации. –Минск: Изд-во БГУ, 1975.
- 2.42. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной оптимизации. –М.: Мир, 1972.

- 2.43. Численные методы условной оптимизации. / Под ред. Ф.Гилла и У.Мюррея. –М.: Мир,1977.
- 2.44. Тихонов А.Н., Ареснин В.Я. Методы решения некорректных задач. –М.: Наука, 1979.
- 2.45. Растрингин Л.А. Статистические методы поиска. Наука,1968.
- 2.46. Растрингин Л.А.,Рипа К.К. Автоматные модели случайного поиска. –Рига: Зинатне, 1973.
- 2.47. Жиглявский А.А. Математическая теория глобального случайного поиска. –М.: Изд-во ЛГУ, 1985. –293 с.
- 2.48. Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. –М.: 1983, -256 с.
- 2.49. Жилинскас А.Г. Глобальная оптимизация. Аксиоматика статистических моделей, алгоритмы, применение. –Вильнюс: Мокслас, 1986.
- 2.50. Сергеев Я.Д., Стронгин Р.Г., Гришагин В.А. Введение в параллельную глобальную оптимизацию. –Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1998.
- 2.51. Horst R., Tuy H. Global Optimization – Deterministic Approaches. –Berlin: Springer, 1990.
- 2.52. Horst R., Pardalos P.M., ets. Handbook of Global Optimization. –Dordrecht: Kluwer, 1995.
- 2.53. Кони Р., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замечания. – М: Радио и связь, 1981.
- 2.54. Евтушенко Ю.Г., Потапов М.А. Численные методы решения многокритериальных задач. //В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. Вып.3. — М.: Наука, 1987, с.209–218.
- 2.55. Альфред Г., Хорцвергер Ю. Введение в интервальные вычисления. –М.: Мир, 1987.
- К части 3 «Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация»*
- 3.1. Беллман Р. Динамическое программирование .- М.: ИЛ, 1960.
- 3.2. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования .- М.: Наука, 1965.
- 3.3. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. - М.: Наука, 1969.
- 3.4. Вагнер Г. Основы исследования операций, том 2.- М.: Мир, 1973.
- 3.5. Таха Х. Введение в исследование операций, том 1.- М.: Мир, 1985.
- 3.6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Основы динамического программирования, Издательство Белорусского государственного университета, Минск, 1975.
- 3.7. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. - М.: Наука, 1976. - 264 с.
- 3.8. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. - М.: Мир, 1985. - 510 с.
- 3.9. Арис Р. Дискретное динамическое программирование .- М.: Мир, 1969.

- 3.10. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы .- М.: "Советское радио", 1964.
- 3.11. Klein D., Hannan E. An algorithm for the multiple objective integer linear programming problem. European journal of Operational Research, 93, 1982, pp. 378 - 385.
- 3.12. Henig M. Vector - valued dynamic programming. SIAM Journal Control and Optimization. 21, 1983, pp. 490 - 499.
- 3.13. Hartley R. Vector optimal routing by dynamic programming, Mathematics of Multiobjective Optimization, Springer - Verlag, Vienna, 1985, pp. 215 - 224.
- 3.14. Коган Д.И. , Лиогонький М.И. Задача о назначениях с учетом индивидуальных предпочтений. "Кибернетика", 1983 г., N 4, с.80 - 85.
- 3.15. Батищев Д.И., Коган Д.И. Транспортные задачи с линейными оценками участников. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1988г., N 1, с.45-51.
- 3.16. Батищев Д.И., Коган Д.И. Вычислительная сложность экстремальных задач переборного типа. Н.Новгород: изд-во ННГУ, 1994, 114 с.
- 3.17. Коган Д.И., Федосенко Ю.С. Задача диспетчеризации: анализ вычислительной сложности и полиномиально разрешимые подклассы. Дискретная математика, 1996 г., т.8, N 3, с.135-147.
- 3.18. Коган Д.И. Двухкритериальные задачи о назначениях: оценки сложности и алгоритмы решения. Известия РАН. Теория и системы управления, 1996 г., N3, с. 80-85.
- 3.19. Карп Р. Сводимость комбинаторных задач.// Кибернетический сборник. Новая серия. Выпуск 12. - М.: Мир, 1975. - с. 5-15.
- 3.20. Кук С. Сложность процедур вывода теорем .- Кибернетический сборник, новая серия, выпуск 12. - М.: Мир, 1975. - с. 5-15.
- 3.21. Левин А.А. Универсальные задачи перебора .- Проблемы передачи информации, 9, № 3, 1973, 115 - 116.
- 3.22. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982. - 416 с.
- 3.23. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы . - М.: Наука, 1984. - 382 с.
- 3.24. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. - М.: Наука, 1989. - 328 с.
- 3.25. Алексеев О.Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации.- М.: Наука, 1987.