

АННОТАЦИЯ

Наименование проекта

Разработка и апробация образовательного комплекса "Модели и методы конечномерной оптимизации"

Структура образовательного комплекса

Планируемая структура образовательного комплекса характеризуется тем, что с точки зрения учебного содержания и практической направленности в нем можно выделить три части, отличающиеся постановками оптимизационных задач и используемым для их решения математическим аппаратом.

Часть 1. Линейное и целочисленное линейное программирование

Часть 2. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация

Часть 3. Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация

В концептуальном плане все три части взаимосвязаны. Например, методы отсечений, применяемые в целочисленном программировании, находят свое развитие в части 2 для выпуклой оптимизации, а также при построении одношагово оптимальных методов многоэкстремальной и многокритериальной оптимизации, методы линейного программирования части 1 могут быть проинтерпретированы с точки зрения общих условий экстремума, получаемых в части 2. Подходы динамического программирования части 3 дополняют методы нелинейного программирования части 2 применительно к задачам оптимизации специальной структуры. Общие подходы к решению многокритериальных задач части 2, частично используются при решении дискретных многокритериальных задач в части 3.

Образовательный комплекс должен включать в себя электронные и печатные материалы лекций, лекционные презентации, задания для практических и лабораторных занятий, необходимые программные лаборатории.

Авторский коллектив

По части 1 образовательного комплекса: д.ф.-м.н., проф. Шевченко В.П., к.ф.-м.н., доц. Золотых Н.Ю.

По части 2 образовательного комплекса: к.ф.-м.н., доц. Городецкий С.Ю., к.ф.-м.н., доц. Гришагин В.А.

По части 3 образовательного комплекса: д.ф.-м.н., проф. Коган Д.И.

Примерный объем часов (возможный вариант распределения)

Курс	Авторы	Продолжительность (час.)		
		Всего	Теория	Практика
Модели и методы конечномерной оптимизации.		120	82	38
Часть 1. Линейное и целочисленное линейное программирование	Золотых Н.Ю. Шевченко В.Н.	32	22	10
Часть 2. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация	Городецкий С.Ю. Гришагин В.А.	64	44	20
Часть 3. Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация	Коган Д.И.	24	16	8

Цели и задачи образовательного комплекса

В целом, курс позволит слушателям:

- получить и углубить теоретические знания по основным разделам конечномерной оптимизации;
- приобрести практические навыки аналитического и численного оценивания решений задач линейной и нелинейной конечномерной оптимизации.

Задачей курса является научить слушателей следующим вопросам.

По части 1 (линейное и целочисленное линейное программирование)

- формирование линейной модели (упрощенной) экономической или производственной ситуации;
- решение задач линейного программирования геометрически и симплекс-методом;
- переходы от прямого описания политопов к двойственному и обратно;
- построение двойственной задачи и использование связей между задачами для отыскания оптимального решения для данной задачи линейного программирования;
- определение целочисленных решений систем линейных уравнений и неравенств;
- применение 1-го и 3-го алгоритма Гомори для решения задач целочисленного линейного программирования.

По части 2 (нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация)

- запись условий экстремума в общих и специальных конечномерных задачах оптимизации, включая многокритериальные;
- владение общими методами учета ограничений в задачах математического программирования, включая методы для многоэкстремальных задач;
- методы конструирования и анализа алгоритмов многоэкстремальной оптимизации;
- знакомство с вычислительными методами оценивания одновременно всего множества Парето в задачах с непрерывно изменяющимися параметрами;
- подходы к построению эффективных стратегий локальной оптимизации для выпуклых и общих задач
- специальные методы учета линейных ограничений

По части 3 (динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация)

- получение общих соотношений метода динамического программирования для задач разного вида
- методы решения дискретных оптимизационных задач, на основе принципов динамического программирования;
- многокритериальные модификации задач о ранце, коммивояжерах, о назначениях, распределении, расписании обслуживания и др.;
- принципы синтеза приближенных и эвристических алгоритмов для многокритериальных задач дискретной оптимизации с использованием подходов динамического программирования и метода ветвей и границ;

Обзор содержания

Часть 1 посвящена классическим задачам линейного программирования и их целочисленным аналогам. В начале курса показывается, как происходит формирование линейной (упрощенной) модели для некоторой экономической или производственной ситуации, затем рассматриваются геометрические методы решения задач линейного программирования, а также симплекс-метод.

Значительное внимание уделено переходам от прямого описания политопов к двойственному и обратно, построению двойственной задачи и использованию связей между этими задачами для отыскания оптимального решения.

Применительно к целочисленным задачам рассматриваются методы определения целочисленных решений систем линейных уравнений и неравенств, а для целочисленных задач линейного программирования приводятся методы их решения на основе 1-го и 3-го алгоритмов Гомори.

Часть 2 посвящена методам решения общих задач математического программирования, включая многокритериальные и многоэкстремальные задачи с ограничениями. С единых позиций рассматриваются как классические

результаты, так и фундаментальные результаты, полученные специалистами нижегородской школы многоэкстремальной оптимизации.

В первом разделе рассматривается соотношение между задачами рационального и оптимального выбора и примеры прикладных задач. Вводится понятие решений по Парето и Слейтеру, а также разбираются различные подходы к отысканию этих решений. Изучаются важные для дальнейшего классы функций и их свойства.

Во втором разделе рассматриваются теоретические основы аналитического решения задач оптимального выбора. Здесь дается обобщение классических результатов по теории экстремума на многокритериальные задачи. Кроме того, для случая общих однокритериальных задач изучаются элементы теории двойственности, а также схемы вытекающих из них вычислительных алгоритмов для задач с ограничениями.

Третий раздел специально посвящен общим методам учета функциональных ограничений. В нем, кроме метода внешнего штрафа, рассмотрены концепции метода модифицированных функций Лагранжа, а также несколько методов параметризации, в частности обобщение индексной схемы Маркина–Стронгина.

Разделы с четвертого по шестой значительно опираются на результаты нижегородской школы по многоэкстремальной оптимизации. В первом из них рассмотрены математические основы построения алгоритмов, исходя из принципов оптимальности, выполняется анализ их свойств исходя из теории характеристической представимости и T-представимости. В пятом разделе разбираются фундаментальные результаты по редукции размерности в многомерных задачах, приводятся основанные на них алгоритмы решения однокритериальных многоэкстремальных многомерных задач с ограничениями. В шестом разделе рассматриваются методы одновременного оценивания всего множества точек, оптимальных по Парето или Слейтеру на примере липшицевых задач, в частности скаляризатор Стронгина–Маркина.

Седьмой раздел части 2 связан с моделями и методами эффективного локального уточнения найденных оценок решения и является необходимым дополнением к материалу предыдущих разделов, позволяющим получать окончательные решения в задачах оптимального выбора. Материал этого раздела включает специальные эффективные алгоритмы решения выпуклых гладких задач (метод эллипсоидов), а также эффективные вычислительные схемы для общих задач локальной оптимизации. Изучаются также специальные методы учета линейных ограничений при локальной оптимизации

Часть 3 посвящена задачам дискретной оптимизации и методу динамического программирования как одному из наиболее эффективных инструментов их решения. Для записи общих соотношений динамического программирования при различных видах целевой функции вводится концепция дискретной управляемой системы, формулируются задачи синтеза оптимальных траекторий. Конструируются уравнения, позволяющие строить оптимальные траектории методами прямого и обратного счета. Показывается, что в терминах дискретных управляемых систем записываются и решаются многие задачи дискретной оптимизации, включая задачи синтеза расписаний обслуживания.

В связи с тем, что в реальных системах управления, планирования, проектирования качество принимаемых решений следует, как правило, оценивать по ряду показателей, значительное внимание уделяется многокритериальным задачам. При этом под решением многокритериальной

задачи понимается синтез полной совокупности эффективных оценок с одновременным обеспечением возможности построения для любой такой оценки порождающего ее Парето-оптимального решения. В частности, излагаются постановки и решающие процедуры для многокритериальных модификаций задачи о ранце, задач одного и нескольких коммивояжеров, задач о назначениях (в том числе с учетом индивидуальных предпочтений участников), задач оптимального распределения капиталовложений, задач выбора траекторий движения, ряда задач синтеза расписаний обслуживания и т.д.

Значительное внимание уделяется вопросам вычислительной сложности задач и алгоритмов. Излагаются общие принципы построения приближенных и эвристических алгоритмов. Для ряда трудно решаемых задач выделяются полиномиально разрешимые подклассы, строятся процедуры синтеза качественных в том либо ином смысле решений за реально приемлемое время. Для многокритериальных задач рассматриваются вопросы синтеза не полных, но достаточно представительных совокупностей эффективных оценок; излагаемые процедуры основываются на соответствующих модификациях метода динамического программирования, а также на схеме ветвей и границ.

Имеющийся задел коллектива

В результате выполнения работ по образовательному гранту в рамках программы EEP Intel в 2002 г., авторский коллектив имеет следующий задел:

- Варианты ученых материалов к лекционным и практическим занятиям в стадии, требующей авторской и окончательной корректуры
- Программные лаборатории для проведения практикумов по части 2 курса
- Опыт апробации фрагментов курса для групп студентов ВМК ННГУ в рамках специализации кафедр ИАНИ, МЛиВА, ТУиДМ

Ожидаемые результаты

Завершение формирования образовательного комплекса "Модели и методы конечномерной оптимизации", включающего следующие элементы:

- учебный план и программу курса,
- задания по программе практических и лабораторных занятий,
- электронные учебные материалы по курсу лекций,
- программные лаборатории для выполнения запланированных лабораторных практикумов:
 - программная лаборатория (планируется ее разработка), иллюстрирующая работу основных алгоритмов части I курса (симплекс-метод, алгоритмы отсечений Гомори, алгоритмы Фурье-Моцкина-Бургера), помогающая студенту овладеть алгоритмами за счет проведения небольших экспериментов;
 - программные лаборатории для исследования методов локальной и многоэкстремальной оптимизации с ограничениями (планируется доработка существующих программных сред LocOpt и MulTex)
- текст курса лекций в виде печатного издания
- презентации для чтения лекций

Примерная программа курса

Часть 1. Линейное и целочисленное линейное программирование

- 1 Линейное программирование
 - 1.1. Примеры реальных задач линейного и выпуклого программирования. Задача о смесях, диете, о разрезании (комплекты). Задачи транспортного типа (двухиндексные и многоиндексные). Транспортные задачи с фиксированными доплатами. Примеры задач с разрывами.
 - 1.2. Приведение ЗЛП к каноническому виду. Симметричная форма. Геометрическая интерпретация. Длина записи входной информации.
 - 1.3. Симплекс-метод. Прямые алгоритмы, строчечная и столбцовая формы записи, примеры заикливания, способы защиты от заикливания, оценка числа итераций, метод искусственного базиса.
 - 1.4. Теорема двойственности. Дополняющая нежесткость. Разрыв двойственности в ЦЛП.
 - 1.5. Двойственные алгоритмы. Геометрическая интерпретация–II.
- 2 Системы линейных неравенств
 - 2.1. Выпуклые множества и конусы. Конечно порожденные и конечно определенные конусы, политопы и полиэдры. Крайние точки и экстремальные лучи. Сопряженность полиэдральных конусов и полярность политопов.
 - 2.2. Алгоритмы построения остова сопряженного конуса и их применение. Переборный алгоритм. Алгоритм Фурье–Мощкина–Бургера.
 - 2.3. Метод эллипсоидов. Полиномиальный алгоритм нахождения рационального решения системы линейных неравенств.
- 3 Методы решения задач ЦЛП
 - 3.1. Идея методов отсечений, геометрическая интерпретация. Выбор вычислительной схемы.
 - 3.2. Методы отсечений Гомори.

Часть 2. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация

1. Математические модели оптимального выбора
 - 1.1. Объект и его описание, модель процесса рационального выбора и постановки оптимизационных задач.
 - 1.2. Различные понятия решения в однокритериальных задачах, примеры.
 - 1.3. Многокритериальные задачи и схемы компромисса (свертки, уступки, метод главного критерия, метод идеальной точки), концепции решений по Парето и Слейтеру, проблема оценивания в целом множества Парето–оптимальных решений
 - 1.4. Модели функций, используемые в задачах оптимального выбора, их свойства
- 2 Теоретические основы аналитического решения задач оптимизации
 - 2.1. Обобщенные условия экстремума на задачи векторной оптимизации (функция Лагранжа, связь условий оптимальности с фактами из теории выпуклых множеств, достаточные условия, необходимые условия, регулярность допустимой области, условия регулярности)
 - 2.2. Условия оптимальности в дифференциальной форме для многокритериальных задач оптимизации специального и общего вида (условия первого порядка, второго порядка)
 - 2.3. Задача двойственная по Лагранжу, элементы теории двойственности в задачах математического программирования
- 3 Общие методы учета функциональных ограничений в задачах математического программирования
 - 3.1. Общие методы учета ограничений, обзор методов приведения к задачам на безусловный экстремум
 - 3.2. Методы внешнего штрафа и свойства задач со штрафом. Построение штрафа. Свойства решений штрафных задач. Сходимость метода при наличии ошибок в решениях штрафных задач, оценки скорости сходимости
 - 3.3. Методы модифицированных функций Лагранжа. Применение в задачах с равенствами и неравенствами. Условия сходимости метода
 - 3.4. Другие методы (методы параметризации, метод внутренней точки, индексный метод учета ограничений)
- 4 Математические основы построения и анализа алгоритмов оптимизации
 - 4.1. Модели численных методов оптимизации. Формальная модель, общая вычислительная схема. Различные виды сходимости методов оптимизации. Влияние априорной информации на оценки решения.

- 4.2 Принципы построения методов оптимизации. Принцип оптимальности. Минимаксный и байесовский подходы к оптимальности. Оптимальность и ε -оптимальность. Парадоксы понятия оптимальности. Последовательная оптимальность, одношаговая оптимальность, асимптотическая оптимальность.
- 4.3 Методы Пиявского, Кушнера, информационно–статистический метод, метод с адаптивными стохастическими моделями, как одношагово–оптимальные вычислительные методы.
- 4.4 Характеристическая модель описания алгоритмов одномерной оптимизации. Класс характеристических алгоритмов. Теорема о включении одношагово–оптимальных алгоритмов. Двусторонняя сходимость и условие останова. Условия всюду плотной сходимости. Условия локально–оптимальной сходимости и достаточные условия сходимости к глобальному минимуму.
- 4.5 Другие модели описания вычислительных методов многоэкстремальной оптимизации. Т-представимые алгоритмы и их свойства. Оценки относительной плотности размещения испытаний при всюду плотной сходимости.
- 5 Фундаментальные способы редукции размерности в многоэкстремальных задачах
 - 5.1 Связь задач многоэкстремальной оптимизации с задачей построения покрытий области поиска. Методы построения неадаптивных покрытий, ЛП_τ–поиск. Адаптивные покрытия.
 - 5.2 Принципы редукции сложности в многомерных задачах. Многошаговая схема, использование разверток, деление на компоненты.
 - 5.3 Многошаговая схема редукции размерности. Семейство «вложенных» штрафных функций. Их связь с сечениями и проекциями допустимого множества. Основное соотношение многошаговой схемы редукции размерности. Минимаксные задачи.
 - 5.4 Строение областей одномерного поиска при использовании многошаговой схемы и свойства одномерных подзадач. Общая структура областей, области с вычислимой границей, задачи без ограничений, выпуклые ограничения.
 - 5.5 Редукция размерности, основанная на использовании кривых Пеано. Отображение отрезка на гиперкуб, простые, неинъективные и множественные развертки. Свойства возникающих одномерных задач. Применение информационно–статистических алгоритмов.
 - 5.6 Построение методов многомерной оптимизации на принципах деления области на компоненты (компонентные методы). Схемы Я.Пинтера, Ю.Г.Евтушенко, Я.Д.Сергеева.
- 6 Методы построения оценок множества Парето в многокритериальных задачах, не использующие параметрических сверток
- 7 Модели и методы поиска локально–оптимальных решений
 - 7.1 Применение принципов оптимальности при построении методов локальной оптимизации для класса выпуклых гладких задач (метод центров тяжести, метод эллипсоидов).
 - 7.2 Принципы построения методов локальной оптимизации в задачах общего вида. (Принцип локального спуска, стратегии выбора направлений спуска и смещений, классификация. Особенность организации одномерного поиска в локальной оптимизации, критерии и комбинированные алгоритмы одномерного поиска)
 - 7.3 Аппроксимационные принципы построения алгоритмов. Анализ свойств классического градиентного метода и метода Ньютона.
 - 7.4 Эффективные методы второго порядка для гладких задач (расширение области сходимости метода Ньютона и борьба со знаконеопределенностью матриц Гессе, использование разложения Холесского, модифицированный метод Ньютона–Рафсона)
 - 7.5 Методы первого порядка, явно изменяющие метрику пространства. Квазиньютоновские методы. В, DFP, DFGH–формулы. Модифицированные квазиньютоновские методы. Метод растяжения пространства.
 - 7.6 Методы сопряженных направлений, их свойства. Построение метода сопряженных направлений на примере метода Флетчера–Ривса.
 - 7.7 Некоторые методы прямого поиска для негладких задач
 - 7.8 Специальные методы учета линейных ограничений в гладких задачах локальной оптимизации. Учет линейных равенств и неравенств, методы активного набора. Особенности учета двусторонних ограничений на переменные.

Часть 3. Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация

1. Метод динамического программирования в задачах дискретной оптимизации.
 - 1.1. Задачи оптимального управления дискретными объектами. Принцип и общие рекуррентные соотношения динамического программирования.
 - 1.2. Построение рекуррентных соотношений динамического программирования для задачи оптимального распределения капиталовложений, задачи коммивояжера и ее модификаций, задач "ранцевого" типа, задач о назначениях с учетом предпочтений участников и т.д.
 - 1.3. Классические задачи теории расписаний и методы их решения (задачи однопроцессорного обслуживания множеств заявок и теорема Кладова - Лившица, задачи с директивными сроками, задачи Джонсона и т.д.).
 - 1.4. Каноническая задача синтеза оптимального расписания обслуживания конечного детерминированного потока заявок и процедура ее решения с использованием метода динамического программирования.
 - 1.5. Задачи построения оптимальных расписаний обслуживания конечного детерминированного потока заявок системой параллельных (последовательных) процессоров и алгоритмы их решения методом динамического программирования.
2. Анализ вычислительной сложности задач дискретной оптимизации, подходы к проблеме синтеза качественных решений за реально приемлемое время.
 - 2.1. Полиномиально разрешимые и NP- трудные задачи дискретной оптимизации.
 - 2.2. Выделение полиномиально разрешимых подклассов задач как подход к преодолению труднорешаемости (иллюстрации на задачах теории расписаний и моделях ранцевого типа).
 - 2.3. Принципы построения приближенных и эвристических алгоритмов для задач дискретной оптимизации (жадные алгоритмы, использование вариантов схемы ветвей и границ, декомпозиция и агрегирование, управляемый случайный поиск, локальная оптимизация, ϵ -подход и т.д.).
3. Дискретные многокритериальные задачи, многокритериальное динамическое программирование.
 - 3.1. Синтез Парето - оптимальных решений методами последовательных уступок и линейной свертки (на примерах задач о назначениях и задач "ранцевого" типа).
 - 3.2. Построение полных и представительных совокупностей эффективных оценок с использованием рекуррентных соотношений многокритериального динамического программирования. Иллюстрация на примерах многокритериальной задачи о ранце, многокритериальной задачи коммивояжера и их модификаций.
 - 3.3. Решение методом динамического программирования многокритериальных задач синтеза расписаний обслуживания.
 - 3.4. Общая схема метода ветвей и границ, модификация схемы ветвей и границ для решения задач дискретной многокритериальной оптимизации.