Программа практических и лабораторных занятий

Цели и задачи практикума

Раздел 1. Использование аналитических методов для численно–аналитического решения задач многокритериальной оптимизации

Цель занятия: отработка приемов численно–аналитического решения задач однокритериальной и многокритериальной оптимизации на основе использования необходимых, а также необходимых и достаточных условий оптимальности, с применением математический пакетов для их решения.

☞ ***Необходимый материал.*** *Для выполнения практической работы необходимо знать теоретический материал второй главы из части 2. А именно — понятия решения по Парето и Слейтеру в многокритериальной оптимизации, условия регулярности допустимой области, а также запись условий оптимальности в градиентной форме.*

В качестве среды для проведения исследований рекомендуется использовать Mathcad одной из последних версий.

Практикум 1.1. Общие принципы численно–аналитического исследования задач непрерывной оптимизации в среде Matcad

Задание 1. Изучение приемов решения систем уравнений и неравенств, применительно к системе условий оптимальности Куна–Таккера для конкретной однокритериальной учебной задачи.

Для выполнения задания предоставляется файл формата *.mcd с демонстрационным вариантом решения учебной задачи следующего вида:

$$f(y_1, y_2, y_3) \to min,$$

$$g_1(y_1, y_2, y_3) \le 0$$

$$g_2(y_1, y_2, y_3) \le 0$$

$$g_3(y_1, y_2, y_3) \le 0,$$

где функции заданы следующим образом.

$$f(y1, y2, y3) := 6 \cdot y1^2 + y2^2 - 2 \cdot y1 \cdot y2 + 9 \cdot y1 - 3y2 + y3^2 - y3$$

$$g1(y1, y2, y3) := y2 - y1 - 3$$

$$g2(y1, y2, y3) := y1 - 5 \cdot y2 + 15$$

$$g3(y1, y2, y3) := y1 - 5$$

Возникающие системы условий оптимальности для этой и других подобных задач представляют собой системы аналитически записанных линейных и нелинейных уравнений и неравенств. Вид системы условий определяется свойствами решаемой задачи (выпуклость, регулярность). Неизвестными величинами в них являются: y — вектор координат точки решения, а также вектор множителей Лагранжа. К решению этих систем можно применить специальное средство системы Mathcad — блок *Given* совместно с функцией *Find(...)*. В качестве параметров функции *Find(...)* передается перечень имен переменных, относительно которых выполняется решение системы условий.

Ниже приведен пример организации данных для решения системы условий оптимальности в Matcad. Предполагается, что приведенные выше определения функций задачи предшествуют в документе *.mcd указанным далее формульным соотношениям. Для вычисления градиентов функций задачи, входящих в условия оптимальности, могут быть использованы средства для аналитических преобразований, встроенные в Matcad.

$$\mathrm{gradf}(y1,y2,y3) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dy1}f(y1,y2,y3) \\ \frac{d}{dy2}f(y1,y2,y3) \\ \frac{d}{dy3}f(y1,y2,y3) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\mathrm{gradg1}(y1,y2,y3) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dy1}g1(y1,y2,y3) \\ \frac{d}{dy2}g1(y1,y2,y3) \\ \frac{d}{dy3}g1(y1,y2,y3) \end{pmatrix} \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} \frac{d}{dy1}g2(y1,y2,y3) \\ \frac{d}{dy2}g2(y1,y2,y3) \\ \frac{d}{dy3}g2(y1,y2,y3) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\mathrm{gradg3}(y1,y2,y3) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dy1}g3(y1,y2,y3) \\ \frac{d}{dy2}g3(y1,y2,y3) \\ \frac{d}{dy3}g3(y1,y2,y3) \end{pmatrix} \rightarrow$$

Решение условий экстремума - зависит от начальной точки

$y1 := 0 \quad y2 := 3 \quad y3 := 1 \quad L1 := 0 \quad L2 := 2 \quad L3 := 0$

Given

$$\begin{pmatrix} 12 \cdot y1 - 2 \cdot y2 + 9 \\ 2 \cdot y2 - 2 \cdot y1 - 3 \\ 2 \cdot y3 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L1 \cdot g1(y1,y2,y3) = 0 \quad L2 \cdot g2(y1,y2,y3) = 0 \quad L3 \cdot g3(y1,y2,y3) = 0$$

$$g1(y1,y2,y3) \le 0 \quad g2(y1,y2,y3) \le 0 \quad g3(y1,y2,y3) \le 0$$

$$v := \mathrm{Find}(y1,y2,y3,L1,L2,L3) \qquad v^T = ▮$$

$$\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix} := v$$

Значения ограничений:

$g1(y1,y2,y3) = ▮ \qquad g2(y1,y2,y3) = ▮ \qquad g3(y1,y2,y3) = ▮$

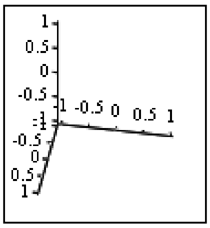
Следует обратить внимание на тот факт, что решение систем условий выполняется системой Mathcad численно, исходя из заданного пользователем (перед блоком Given) начального приближения. Разные приближения могут приводить к разным решениям. При некоторых приближениях решения вообще могут быть не обнаружены. В этом случае следует так упростить систему условий, исключив, например, ограничения на знаки множителей Лагранжа (как это показано в приведенном примере) или на правые части ограничений–неравенств, чтобы система решалась, а затем уже постепенно добавлять нарушенные ограничения, корректируя одновременно начальное приближение решения.

Задание 2. Исследование структуры задачи оптимизации средствами Matcad.

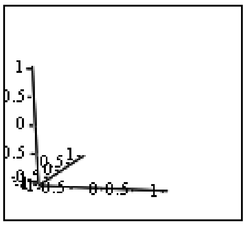
Исследование задачи должно включать изучение свойств функций, входящих в нее постановку, например, выпуклости. Кроме этого, в учебных целях целесообразно построение карт изолиний сечений функций или соответствующих им поверхностей.

$$f(y1,y2,y3) := 6\cdot y1^2 + y2^2 - 2\cdot y1\cdot y2 + 9\cdot y1 - 3y2 + y3^2 - y3$$

$$z(y1,y2) := f(y1,y2,0.5)$$



z



z

Для выполнения приведенных построений достаточно задать вспомогательную функцию от двух переменных, являющуюся сечением исследуемой зависимости (на рисунке вспомогательная функция определена как *z(y1,y2)*), и затем с помощью панели инструментов графиков Matcad задать область изолиний и область поверхностей. В них нужно просто в местозаполнителе в левом нижнем углу указать имя функции *z*. Изображения будут автоматически построены.

Для проверки выпуклости можно прибегнуть к подсчету собственные чисел матриц Гессе исследуемых функций в различных точках области определения. Их вычисление выполняется с помощью функции *eigenvals(**M**)*, которая принимает в качестве параметра матрицу ***M***, а возвращает вектор ее собственных чисел. Ниже приведен пример такого вычисления. В этом примере сначала аналитически вычисляется матрица Гессе функции *f*, а затем полученная матрица копируется в переменную M, к которой уже применяется нужная операция.

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dy1^2}f(y1,y2,y3) & \frac{d}{dy1}\frac{d}{dy2}f(y1,y2,y3) & \frac{d}{dy1}\frac{d}{dy3}f(y1,y2,y3) \\ \frac{d}{dy1}\frac{d}{dy2}f(y1,y2,y3) & \frac{d^2}{dy2^2}f(y1,y2,y3) & \frac{d}{dy2}\frac{d}{dy3}f(y1,y2,y3) \\ \frac{d}{dy1}\frac{d}{dy3}f(y1,y2,y3) & \frac{d}{dy2}\frac{d}{dy3}f(y1,y2,y3) & \frac{d^2}{dy3^2}f(y1,y2,y3) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 12 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M := \begin{pmatrix} 12 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad LL := eigenvals(M)$$

$$LL = \begin{pmatrix} 12.385 \\ 1.615 \\ 2 \end{pmatrix}$$ Собственные числа

Заметим, что с помощью другой функции — *eigenvecs(**M**)* можно вычислить набор нормированных собственных векторов. Эта функция возвращает матрицу, в которой собственные векторы размещены по столбцам.

Задание 3. Сопоставление результатов численно–аналитического решения задач условной оптимизации с результатами их непосредственного численного решения.

Численное решение может быть получено с помощью следующей конструкции Matcad:

$$y1 := 0 \quad y2 := 3 \quad y3 := 1$$

Given

$$g1(y1, y2, y3) \le 0 \quad g2(y1, y2, y3) \le 0 \quad g3(y1, y2, y3) \le 0$$

$$\text{Minimize}(f, y1, y2, y3) = \blacksquare$$

Практикум 1.2. Численно–аналитическое решение многокритериальных задач

При поиске решений многокритериальных задач множители Лагранжа, стоящие в условиях оптимальности при целевых функциях, следует использовать как параметры. Для получения оценки множества слабо эффективных точек процедуру решения придется повторять многократно, изменяя значения этих параметров. При этом можно использовать подход, основанный на продолжении ранее найденных оценок по параметру.

Задание 1. Найдите слабо эффективные точки в задаче о минимизации функций

$$6y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + 9y_1 - 3y_2 + y_3^2 - y_3$$
$$(y_1 + 5/12)^2 + (y_2 - 13/12)^2 + (y_3 - 17/12)^2$$

при ограничениях

$$y_1 - y_2 \ge -3, \quad -y_1 + 5y_2 \ge 15, \quad 0 \le y_1 \le 5$$

Как изменится решение, если в задаче 1 к ограничениям–неравенствам, добавить ограничение–равенство $y_1 + y_3 = 1$?

Необходимо построить покрытие множества слабо эффективных точек.

Задание 2. Найдите слабо эффективные точки в задаче о минимизации функций

$$y_1^2 - y_1y_2 + 2y_2^2 - 4y_1 - 5y_2 + y_3$$
$$3y_1^2 + 2y_2^2 + 6y_3^2 - 2y_1y_2 - 4y_2y_3$$

при ограничениях

$$y_1 + 2y_2 + y_3^2 \le 6,$$
$$0 \le y_1 \le 2,$$
$$y_2 \ge 0.$$

Задание 3. Найдите слабо эффективные точки в задаче о минимизации функций

$$5y_1^2 + 9y_2^2 + 5y_3^2 - 6y_1y_2 - 6y_2y_3 + 2y_1y_3$$
$$y_1^2 + 0{,}5y_2^2 + 0{,}5y_3^2 - y_1y_3 - 7y_3 - 5y_2$$

при ограничениях

$$y_3 - 0{,}5y_1 \le 1,$$
$$-y_1 + 5y_3 \ge 10,$$
$$5 \le y_1 \le 8, \quad y_1 + y_2 = 1$$

Лист регистрации изменений

Дата	Автор	Комментарии
8.07.03	Городецкий С.Ю.	Создание документа