В. Н. Шевченко, Н. Ю. Золотых

Линейное и целочисленное линейное программирование

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
2004

УДК 681.142.2 + 519.682.1

Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004. — 154 с.

ISBN 5-85746-761-6

ISBN 5-85746-761-6

Оглавление

Предисловие

Настоящий учебник является коренной переработкой учебных пособий, [10], [11], [7], вышедших в свет более 25 лет назад. Он основан на курсе лекций по дисциплине «Линейное программирование» и, частично, — специальном курсе «Дискретная оптимизация», читаемых для студентов факультета ВМК по специальности «Прикладная математика и информатика».

Для понимания основного текста необхожимо выполнить дополняющие теоретический материал упражнения, которые вкраплены в основной текст. Кроме того, каждая глава завершается списком задач, которые, как правило, носят вычислительный характер и предназначены для того, чтобы закрепить основной материал.

Авторы благодарят С. И. Веселова, А. Ю. Чиркова и В. А. Таланова за полезные обсуждения. Мы выражаем признательность С. В. Сидорову, указавшему на многие опечатки и неточности в первоначальных версиях рукописи.

Обозначения

$\mathbf{Z}$ кольцо целых чисел,

$\mathbf{Q}$ поле рациональных чисел,

$\mathbf{R}$ поле вещественных чисел,

P^n множество n-мерных арифметических векторов с компонентами из P (рассматриваемых как строки или как столбцы),

$P^{n\times m}$ множество матриц размером $n \times m$ с элементами из P,

$\operatorname{rank} A$ ранг матрицы A,

$\det A$ определитель матрицы A,

$\lfloor \alpha \rfloor$ целая часть числа α: наибольшее целое, не превосходящее α,

$\lceil \alpha \rceil$ наименьшее целое, не меньшее α.

$\{\alpha\}$ дробная часть числа α: $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$.

Глава 1

Введение

1.1. Задача математического программирования

До XIX века основным поставщиком прикладных задач для математики были астрономия, механика, физика, а основной и весьма плодотворной идеей — идея непрерывности, приведшая к становлению мощного аппарата интегрально-дифференциального исчисления. Развитие экономики привело к возможности рассмотрения количественных закономерностей и в рамках этой науки; с появлением экономических моделей Кенэ[1] (1758 г.), Маркса[2], Вальраса[3] и др. по существу началась математическая экономика.

В 1939 году вышла в свет монография Л. В. Канторовича[4] «Математические методы организации и планирования производства», где выявлен широкий класс производственно-экономических оптимизационных задач, допускающих строгое математическое описание. Идеи, содержащиеся в этой книге, были затем им развиты и привели к созданию линейного программирования. Начиная с 1942 года, исследования по ли-

[1] Франсуа Кенэ (1694–1774) — французский экономист.

[2] Карл Маркс (1818–1883) — немецкий экономист и философ.

[3] Леон Вальрас (1834–1910) — французский экономист.

[4] Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) — советский математик и экономист; Академик АН СССР (1964); Гос. премия СССР (1949); Ленинская премия (1965); Нобелевская премия (1975, с формулировкой «за вклад в теорию оптимального использования ресурсов», совместно с Купмансом).

нейному, а позже и нелинейному программированию активно ведутся и в США (Данциг[5], Купманс[6], фон Нейман[7] и др.).

Таким образом, в середине XX века выкристаллизовались оптимизационные задачи двух типов: максимизации прибыли при ограниченных ресурсах и минимизации расходов для осуществления заданного комплекса работ. Рассмотрим подробнее первую из них. Пусть на предприятии изготавливаются n видов продукции. Обозначим объемы ее выпуска через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответсвенно. Таким образом, план работы предприятия можно охарактеризовать вектором $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. По x однозначно находится вектор $y = F(x)$, описывающий затраты ресурсов, и число $f(x)$, соответствующее прибыли. Возможно, что на x нужно наложить еще ограничения технологического характера, которые могут принимать вид равенств, неравенств или описываться более сложно. Требуется определить план выпуска продукции, при котором ограничения на ресурсы выполнены, а прибыль $f(x)$ максимальна.

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^n$, элементы которого будем называть *векторами*, или *точками*. Пусть M — множество точек, называемое *допустимым множеством*. Произвольный вектор x из M называется *планом*, или *допустимым вектором*. Пусть $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Функция $f(x)$ называется *целевой*. Вектор $\widetilde{x} \in M$ назовем *оптимальным*, *точкой (глобального) максимума*, если $f(\widetilde{x}) \geq f(x)$ для всякого x из M.

Задача математического программирования, или *задача оптимизации* состоит в решении следующих подзадач:

1) проверить, существует ли $x \in M$;

2) выяснить, существует ли оптимальный вектор $\widetilde{x}$;

3) найти какой-нибудь оптимальный вектор $\widetilde{x}$ и вычислить $f(\widetilde{x})$.

Для сокращенного обозначения задачи математического программирования введем запись

$$\max_{x \in M} f(x). \tag{1}$$

---

[5]Джордж Бернард Данциг (род. 1914) — американский математик.

[6]Тьяллинг Чарлз Купманс (1910–1985) — американский экономист голландского происхождения. Нобелевский лауреат (1975, совместно с Л. В. Канторовичем).

[7]Джон фон Нейман (1903–1957) — математик; один из основателей кибернетики. Родился в Венгрии, жил и работал в Германии и США.

Задачу (1) называют также задачей максимизации функции $f(x)$ на множестве M (или при ограничениях $x \in M$).

Наряду с задачей (1) *на максимум* рассматривают задачу *на минимум*:

$$\min_{x \in M} f(x). \tag{2}$$

В этом случае вектор $\widetilde{x} \in M$ называется *оптимальным*, или *точкой (глобального) минимума*, если $f(\widetilde{x}) \leq f(x)$ для всякого x из M. Заметим, что задача минимизации функции $f(x)$ сводится к задаче максимизации функции $g(x) = -f(x)$,

По-видимому, общего алгоритма, решающего задачу математического программирования, не существует. С другой стороны, имеется много важных приложений, приводящих к классам задач вида (2), в которых M и $f(x)$ удовлетворяет каким-то дополнительным предположениям. Рассмотрим некоторые из этих классов.

1.2. Задача выпуклого программирования

Определение 1.1. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — точки, α_i — некоторые числа, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. *Выпуклой комбинацией* точек $p_1, p_2, \ldots, p_s$ называется точка

$$p = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i.$$

Определение 1.2. *Выпуклой оболочкой* $\operatorname{Conv} M$ множества точек M называется множество всех их выпуклых комбинаций. В частности, для конечного множества $M = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$

$$\operatorname{Conv}\{p_1, p_2, \ldots, p_s\} = \left\{ p = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i : \ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, s) \right\}.$$

Определение 1.3. Выпуклая оболочка двух точек y и z называется *отрезком* и обозначается $[y, z]$. Итак, $[y, z] = \{\alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z : 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

Определение 1.4. Множество M называется *выпуклым*, если для любых двух точек y и z из M справедливо $[y, z] \subseteq M$.

y z

z

y

a) b)

Рис. 1.1.

На рис. 1.1a) изображено выпуклое множество, а на рис. 1.1b) — невыпуклое.

Упражнение 1.5. Докажите, что выпуклая оболочка является минимальным по включению выпуклым множеством, содержащим заданное множество точек. Для этого докажите, что 1) $\mathrm{Conv}\, M$ — выпуклое множество, 2) для любого выпуклого P, содержащего M, справедливо $\mathrm{Conv}\, M \subseteq P$. Это иллюстрируется рис. 1.2.

Рис. 1.2.

Рассмотрим примеры выпуклых множеств.

Определение 1.6. *Замкнутым полупространством* называется множество

$$H(a, a_0) = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq a_0 \right\},$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a \neq 0$.

Утверждение 1.7. *Замкнутое полупространство выпукло.*

Доказательство. Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — две точки замкнутого полупространства $S(a, a_0)$. Докажем, что точка $\alpha z + (1-\alpha)y$, где $0 \le \alpha \le 1$, также принадлежит $S(a, a_0)$. Для этого убедимся в справедливости неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha \cdot z_i + (1-\alpha) \cdot y_i) \le a_0. \qquad (3)$$

По определению для точек y и z выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i z_i \le a_0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \le a_0.$$

Умножая эти неравенства соответственно на неотрицательные числа α и $(1-\alpha)$, а затем складывая, получим (3). ∎

Определение 1.8. *Шаром* размерности n радиуса r называется множество

$$B_n(r) = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le r^2 \right\}.$$

Утверждение 1.9. *Шар является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — точки из $B_n(r)$. Покажем, что точка

$$\alpha \cdot z + (1-\alpha) \cdot y = (\alpha z_1 + (1-\alpha)y_1, \ldots, \alpha z_n + (1-\alpha)y_n),$$

где $0 \le \alpha \le 1$, принадлежит $B_n(r)$. Проделаем преобразования:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha z_i + (1-\alpha)y_i)^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} y_i z_i + (1-\alpha)^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}.$$

Заменяя во всех выражениях

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

на r^2, получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha z_i + (1-\alpha)y_i)^2 \le (\alpha^2 + 2\alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2)r^2 = r^2,$$

что и требовалось. ∎

Утверждение 1.10. *Пересечение выпуклых множеств выпукло.*

Доказательство. Пусть $\{M_i : i \in I\}$ — система (возможно бесконечная) выпуклых множеств и

$$M = \bigcap_{i \in I} M_i.$$

Пусть y и z точки из M, $0 \le \alpha \le 1$. Поскольку для каждого i справедливо включение $M \subseteq M_i$, то точки y и z принадлежат M_i. Так как M_i — выпуклое множество, то точка $(1-\alpha)\cdot y + \alpha \cdot z$ принадлежит M_i, а, значит, и пересечению M. ∎

Определение 1.11. *Полиэдром*, или *многогранным множеством*, называется множество решений системы линейных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

Из определения получаем, что полиэдр есть пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Выпуклость полиэдра следует из утверждений 1.7 и 1.10.

Определение 1.12. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* на выпуклом множестве M, если для любых двух точек x и y из M и любого числа α такого, что $0 \le \alpha \le 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{4}$$

Функция $f(x)$ называется *вогнутой* на выпуклом множестве M, если для любых двух точек x и y из M и любого числа α такого, что $0 \le \alpha \le 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{5}$$

Очевидно, функция $f(x)$ является вогнутой тогда и только тогда, когда $g(x) = -f(x)$ выпукла.

Геометрически неравенство (5) означает, что график выпуклой функции не должен быть расположен выше прямой, соединяющей любые две точки графика (см. рис. 1.3).

$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$

$f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right)$

x M y

$\alpha x + (1-\alpha)y$

Рис. 1.3.

Лемма 1.13. *Если $f(x)$ выпукла на M, $x_i \in M$, $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ и $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, то*

$$f\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(x_i).$$

Доказательство. Индукция по s. ∎

Заметим, что если функция $f(x)$ — выпуклая на выпуклом множестве M, то множество $\{x \in M : f(x) \leq \beta\}$ также выпукло. В частности, выпуклость множества $H(a, a_0)$ следует из выпуклости линейной функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

а выпуклость шара $B_n(r)$ вытекает из выпуклости функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Определение 1.14. Задача минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве и задача максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве называются *задачами выпуклого программирования*.

Задача выпуклого программирования является частным случаем задачи математического программирования (2), когда M — выпуклое множество, а функция $f(x)$ выпукла на M.

Важным свойством задачи выпуклого программирования является совпадение локального и глобального минимума.

Определение 1.15. Точка $\widetilde{x}$ из M называется *локальным минимумом* функции $f(x)$ на M, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого y из M, удовлетворяющего неравенству $|y-\widetilde{x}| < \varepsilon$, выполняется неравенство $f(\widetilde{x}) \leq f(y)$.

Другими словами, точка $\widetilde{x}$ является точкой локального минимума, если найдется такая ε-окрестность точки $\widetilde{x}$, что значение функции $f(x)$ в любой точке этой окрестности не меньше $f(\widetilde{x})$.

Теорема 1.16. *Всякий локальный минимум в задаче выпуклого программирования является оптимальным вектором.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{x}$ — локальный минимум выпуклой на M функции $f(x)$ и вопреки доказываемому утверждению существует $\widehat{x} \in M$ такой, что $f(\widehat{x}) < f(\widetilde{x})$. По определению выпуклой функции, при $0 < \alpha \leq 1$ выполняются неравенства

$$f(\alpha\widehat{x} + (1-\alpha)\widetilde{x}) \leq \alpha f(\widehat{x}) + (1-\alpha)f(\widetilde{x}) < f(\widetilde{x}).$$

Однако это противоречит локальной минимальности $\widetilde{x}$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ точка $z = \alpha\widehat{x} + (1-\alpha)\widetilde{x}$, где

$$\alpha = \min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{\varepsilon}{2|\widehat{x}-\widetilde{x}|}\right\},$$

принадлежит как M (в силу выпуклости), так и ε-окрестности точки $\widetilde{x}$ (так как $|z-\widetilde{x}| = \alpha|\widehat{x}-\widetilde{x}| < \varepsilon$). ∎

Таким образом, чтобы определить, достигает ли выпуклая на выпуклом множестве M функция $f(x)$ минимума в точке $\widetilde{x}$, достаточно рассмотреть поведение $f(x)$ вблизи $\widetilde{x}$; если $\widetilde{x}$ — неоптимальный, то найдется отрезок (направление), двигаясь по которому можно получить новый допустимый вектор с меньшим, чем в $\widetilde{x}$, значением $f(x)$. Методы, основанные на этой идее, называются *градиентными*.

Не так обстоит дело, если речь идет о максимизации выпуклой на выпуклом множестве M функции $f(x)$.

Определение 1.17. Задача максимизации выпуклой функции на выпуклом множестве и задача минимизации вогнутой функции на выпуклом множестве называются *задачами вогнутого программирования*.

В таких задачах для нахождения оптимального вектора, вообще говоря (как правило, так оно и бывает), необходимо перебрать все локальные максимумы. Однако, если в рассматриваемом случае M задано в виде $M = \mathrm{Conv}\,\{p_1, \ldots, p_s\}$, то имеет место следующая теорема.

Теорема 1.18. *Если $M = \mathrm{Conv}\,\{p_1, \ldots, p_s\}$ и $f(x)$ — выпуклая на M функция, то среди векторов $p_1, \ldots, p_s$ есть оптимальный вектор задачи (1).*

Доказательство. Пусть k такое число, что

$$f(p_k) = \max\,\{f(p_i) : \; i = 1, \ldots, s\}\,.$$

Тогда для любого $p \in \mathrm{Conv}\,\{p_1, \ldots, p_s\}$ имеет место

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i\right) \le \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(p_i) \le f(p_k),$$

т. е. p_k — оптимальный вектор задачи (1). ∎

Разумеется, теорема 1.18 сводит дело к конечному перебору, однако число s в практически важных задачах настолько велико, что осуществить этот перебор не под силу и компьютеру. С другой стороны, известные из математического анализа условия, выделяют точки, «подозрительные» на локальный экстремум, лишь внутри области и, следовательно, здесь не работают.

Пусть теперь $M = \mathrm{Conv}\,\{p_1, \ldots, p_s\}$, а $f(x)$ — линейная функция. В этом случае применимы и теорема 1.16 и теорема 1.18, и полный перебор векторов $p_1, \ldots, p_s$ можно попытаться заменить их упорядоченным перебором. Симплекс-метод, рассматриваемый ниже, является конкретизацией этой идеи.

1.3. Задача линейного программирования

Определение 1.19. Задача минимизации или максимизации линейной функции на полиэдре M называется *задачей линейного программирования* (ЗЛП).

Согласно определению, ЗЛП может быть записана в виде

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i & (i = 1, \ldots, k), \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i & (i = k+1, \ldots, k+s), \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i = k+s+1, \ldots, m), \end{cases} \tag{6}$$

где величины c_j, a_{ij}, b_i ($j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, m$) являются элементами некоторого подполя F поля вещественных чисел $\mathbf{R}$. Умножив неравенства с $(k+1)$-го по $(k+s)$-ое на -1 и переименовав коэффициенты, представим ЗЛП (6) в виде:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i & (i = 1, \ldots, k+s), \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i = k+s+1, \ldots, m). \end{cases} \tag{7}$$

Если вместо задачи на максимум в (6) рассматривается задача на минимум, то форму (7) легко получить умножением целевой функции на -1 и переименовыванием коэффициентов.

ЗЛП в форме (7) называется *общей*. Кроме общей формы ЗЛП выделяют также стандартную и каноническую формы. ЗЛП вида

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \; a_{12}x_2 + \ldots + \; a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + \; a_{22}x_2 + \ldots + \; a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ \quad x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{8}$$

называется *стандартной*, а ЗЛП вида

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{9}$$

называется *канонической*.

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица $m \times n$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^\top$ — вектор-столбец, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — вектор-строка. Если $a = (a_1, \ldots, a_m)$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)$, то под неравенством $a \geq b$ будем понимать m неравенств $a_i \geq b_i$ ($i = 1, \ldots, m$).

Используя матричные операции, запишем стандартную и каноническую ЗЛП в матричном виде:

$$\max cx \qquad\qquad \max cx$$

$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

соответственно. Для аналогичного представления общей ЗЛП понадобится блочное представление:

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b' \\ b'' \end{pmatrix},$$

где A' и b' состоят из первых s строк матрицы A и первых s компонент вектора b, а A'' и b'' — из остальных строк матрицы A и остальных компонент вектора b соответственно. Общая ЗЛП примет вид:

$$\max cx$$

$$\begin{cases} A'x \leq b', \\ A''x = b''. \end{cases}$$

Все введенные формы ЗЛП эквивалентны в том смысле, что каждую из них можно преобразовать к любой другой. Оставшаяся часть данного раздела посвящена доказательству этого факта.

Покажем, как привести общую ЗЛП к стандартной. Для этого каждое уравнение $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ из (8) заменим двумя неравенствами

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &\le b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n &\le -b_i, \end{aligned}$$

положим $x_j = u_j - v_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и потребуем выполнение неравенств $u_j \ge 0$, $v_j \ge 0$. Общая задача линейного программирования в новых переменных будет иметь вид стандартной ЗЛП:

$$\max(c_1(u_1 - v_1) + c_2(u_2 - v_2) + \ldots + c_n(u_n - v_n))$$

$$\begin{cases} a_{i1}(u_1 - v_1) + \ldots + a_{in}(u_n - v_n) \le b_i & (i = 1, \ldots, k+s), \\ a_{i1}(u_1 - v_1) + \ldots + a_{in}(u_n - v_n) \le b_i & (i = k+s+1, \ldots, m), \\ a_{i1}(v_1 - u_1) + \ldots + a_{in}(v_n - u_n) \le -b_i & (i = k+s+1, \ldots, m), \\ u_j \ge 0,\ v_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \end{cases} \tag{10}$$

или в матричном виде:

$$\max(cv - cu)$$

$$\begin{cases} A'\,u - A'\,v \le b', \\ A''\,u - A''\,v \le b'', \\ -A''\,u + A''\,v \le -b'', \\ u \ge 0, \quad v \ge 0, \end{cases}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^\top$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top$.

Если общая задача линейного программирования имеет решение x, то стандартная ЗЛП (10) тоже имеет решение, которое можно найти по формулам:

$$u_j = \begin{cases} x_j, & \text{если} \quad x_j \ge 0, \\ 0, & \text{если} \quad x_j < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad v_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x_j \ge 0, \\ -x_j, & \text{если} \quad x_j < 0. \end{cases}$$

С другой стороны по решению (u, v) стандартной ЗЛП (10) можно найти решение $x = u - v$ общей ЗЛП. Очевидно, что значения целевых функций на соответствующих векторах равны. Таким образом, общая задача линейного программирования (7) легко сводится к стандартной задаче линейного программирования (10).

Приведем стандартную ЗЛП (8) к каноническому виду. Для этого введем новые неизвестные y_i $(i = 1, 2 \ldots, m)$, называемые *слабыми переменными*, или *невязками*. Рассмотрим каноническую ЗЛП

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n + y_1 \qquad\qquad\quad = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n \qquad + y_2 \qquad\quad = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad\quad + y_m = b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \end{cases} \tag{11}$$

или в матричном виде:

$$\max cx$$

$$\begin{cases} Ax + y = b, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top$. Легко видеть, что между решениями x стандартной ЗЛП (8) и решениями (x, y) канонической ЗЛП (11) существует взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow (x, b - Ax)$. Таким образом, стандартная ЗЛП сводится к канонической.

Так как каноническая ЗЛП является частным случаем общей задачи линейного программирования, то эквивалентность всех форм ЗЛП установлена.

1.4. Основная идея симплекс-метода

Попробуем показать, как из теорем 1.16 и 1.18 можно получить алгоритм решения ЗЛП. Более формальное изложение этого алгоритма, носящего название *симплекс-метод*, находится в последующих разделах.

Рассмотрим стандартную ЗЛП (8). Если $b \geq 0$, то $x = 0$ — допустимый вектор. Если при этом $c \leq 0$, то для любого допустимого вектора справедливо $cx \leq 0$, следовательно, нулевой вектор является оптимальным. Если найдется такое s, при котором $c_s > 0$, то попытаемся увеличить x_s, не меняя при этом других координат и сохраняя условие допустимости (ср. с теоремой 1.16). Ясно, что если для всех $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ выполнено неравенство $a_{is} \leq 0$, то величину x_s можно увеличивать неограниченно и, следовательно, целевая функция на множестве допустимых векторов не ограничена сверху. Если же найдется такое i, при котором $a_{is} > 0$, то неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j \leq b_r \tag{12}$$

ограничивает рост x_s величиной b_i/a_{is}. Положим

$$\alpha = \frac{b_r}{a_{rs}} = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} : a_{ij} > 0, i = 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

Если $\alpha > 0$, то получим новый допустимый вектор αe_s, где e_s — вектор, у которого все компоненты равны 0, кроме s-ой, равной 1. Значение линейной формы на векторе αe_s равно $\alpha c_j > 0$. Можно проверить[8], что замена переменной x_s на переменную

$$y_r = b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j$$

приведет к стандартной задаче с неотрицательной правой частью и процесс можно повторить. Указанную замену переменных можно выполнить и при $\alpha = 0$ (так и делается), однако при этом «новый» допустимый вектор равен «старому».

Заметим, что существуют примеры, показывающие, что условие $c \leq 0$ не является необходимым условием оптимальности точки $x = 0$ (см. задачу 1.14).

Термин «симплекс-метод» был предложен Моцкиным[9] и Данцигом. Поясним происхождение этого термина.

Определение 1.20. Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_t$ — точки в $\mathbf{R}^n$, такие, что векторы $q_1 = p_1 - p_0, q_2 = p_2 - p_0, \ldots, q_t = p_t - p_0$ линейно независимы. Множество $\mathrm{Conv}\,\{p_0, p_1, \ldots, p_t\}$ называется *t-мерным симплексом*.

Упражнение 1.21. Доказать, что n-мерный симплекс можно описать как множество решений системы, состоящей из $n+1$ линейного неравенства. Указание: доказать, что если $p_0 = 0$, то система имеет вид

[8] Формально это будет вытекать из результатов раздела 2.2.

[9] Теодор Самуэль Моцкин (1908–1970) — математик. Родился в Германии, жил и работал в Германии, Израиле и США.

$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \le b$, $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, иначе перейти к системе координат с началом в точке p_0 и базисом $q_1, \ldots, q_n$.

Приписав к неравенствам $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ограничение (12) получим систему неравенств, определяющую (в случае ограниченности полученного множества) n-мерный симплекс. Таким образом, симплекс-метод можно описать как движение от одного симплекса к соседнему.

1.5. Примеры задач линейного программирования

1.5.1. Задача максимизации прибыли

Пусть имеется m видов ресурсов в количестве $b_1, b_2, \ldots, b_m$, которые могут быть использованы при производстве n видов изделий. Известны числа a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, характеризующие количество i-го ресурса, необходимого для производства j-го изделия. Кроме этого, известна стоимость c_j единицы j-го изделия. Необходимо найти план выпуска изделий, максимизирующий прибыль от продажи всех изделий.

Обозначив через x_j количество j-го изделия, получим ЗЛП:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = 1, \ldots, m), \\ x_j \ge 0 & (j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Заметим, что если j-ое изделие не делимо, то на x_j должно быть наложено требование целочисленности. Полученная задача, называемая *задачей с неделимостями*, является задачей (частичного) целочисленного линейного программирования (см. главу 5).

1.5.2. Задача минимизации расходов

Пусть имеется m видов ресурсов в количестве $b_1, b_2, \ldots, b_m$, которые могут быть использованы при производстве n видов изделий. Известны числа a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, характеризующие количество i-го ресурса, необходимого для производства j-го изделия. Кроме этого, известна стоимость c_j единицы j-го изделия. Необходимо найти план выпуска изделий, максимизирующий прибыль от продажи всех изделий.

Рассмотрим некоторое производство, выпускающее m видов продуктов и для этого использующее n видов ресурсов. Пусть a_{ij} характеризуют затраты j-го ресурса на i-ой работе ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$). Известна стоимость c_j единицы j-го ресурса. Допустим, что план выпуска продукции известен заранее: необходимо выпустить b_i единиц i-го продукта. Необходимо так организовать производство, чтобы затраты на используемые ресурсы были минимальны.

1.5.3. Задача о «смесях»

Имеется n компонентов, при сочетании которых в различных пропорциях образуются различные смеси. В состав каждого компонента входят m веществ. Пусть a_{ij} означает количество i-го вещества ($i = 1, \ldots, m$), которое входит в состав единицы j-го компонента ($j = 1, \ldots, n$), а a_i — количество i-го вещества, которое входит в единицу смеси. Заданы числа c_j ($j = 1, \ldots, n$), характеризующие цену единицы j-го компонента, и числа b_i ($i = 1, \ldots, m$), указывающие минимально необходимое содержание i-го вещества в смеси. Требуется определить состав смеси минимальной стоимости.

Пусть числа x_j ($j = 1, \ldots, n$) характеризуют количество j-ой компоненты в смеси. Тогда задача принимает следующий вид. Требуется минимизировать функцию, характеризующую общую стоимость:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

при условиях обязательного минимального содержания каждого вещества:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

По-видимому, одной из первых практических задач такого рода была задача составления диеты, поставленная в 1945 г. Дж. Стиглером[10] и решенная под его руководством в Национальном бюро стандартов США. Рассматриваемая система имела параметры $m = 9$, $n = 77$ (см. [4], с. 521–527).

---

[10] Джордж Стиглер (1911–1991) — американский математик и экономист. Нобелевский лауреат по экономике (1982).

Пример 1.22. [Ирландский парадокс.] Р. Гиффен[11] обратил внимание на то, что во время голода в Ирландии в середине XIX века при росте цен на картофель спрос на него существенно увеличился. Это противоречит классическому закону спроса: при росте цены объем приобретаемого товара уменьшается. Увеличение спроса на товар при увеличении цены на него в экономической литературе носит название *эффект Гиффена*. Попробуем дать объяснение этому «парадоксу».

Предположим, что основу питания ирландцев составляли картофель и мясо[12]. Пусть пищевая ценность 1 кг картрофеля составляет 2 единицы, а пищевая ценность 1 кг мяса составляет 5 единиц, при этом общая питательная ценность пищи, потребляемой человеком за неделю, не должна быть меньше 20 единиц. Рыночная цена 1 кг картофеля — 1 ирландский фунт, 1 кг мяса — 5 ирландских фунтов. В среднем ирландец не мог тратить на питание более 15 ирландских фунтов. Определим рацион питания, при котором потребление мяса достигает максимума.

Обозначим через x_1 количество потребляемого за неделю картофеля, а через x_2 — количество потребляемого за неделю мяса. Получаем следующую ЗЛП:

$$\max x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 20, \\ x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решим ее графически (см. рис. 1.4). Область допустимых решений представляет собой треугольник. Оптимум достигается в точке $\widetilde{x} = (5, 2)^\top$.

Пусть цены на картофель увеличились на 25 %. Соответсвующая ЗЛП имеет вид:

$$\max x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 20, \\ 5/4\, x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Также решим ее графически (см. рис. 1.5). Теперь оптимум достигается в точке $\widetilde{x} = (20/3\, ,\, 4/3\,)^\top$. Как видим, потребление мяса уменьшилось.

[11]Роберт Гиффен (1837–1910) — английский статистик и экономист.

[12]Приведенные далее числа условны.

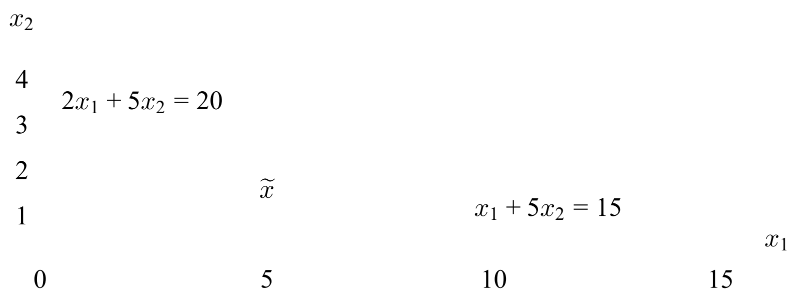

Рис. 1.4.

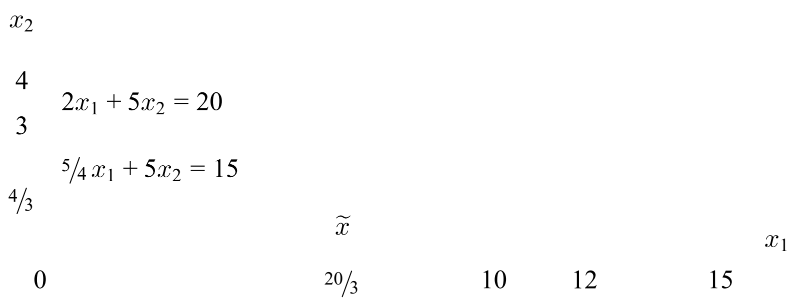

Рис. 1.5.

1.1. В условиях примера 1.22 правительство решило компенсировать повышение цены на картофель путем надбавок к зарплате, пособий и т. п. Пусть в результате этой компенсации ирландец на питание в среднем может тратить 16 ирландских фунтов. Покажите, что и при этом потребление картофеля увеличится.

1.6. Задачи

1.2. Выпукло ли множество точек $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, для которых либо $x_1 \geq 0$, либо $x_2 \geq 0$?

1.3. *Аффинной комбинацией* точек $p_1, p_2, \ldots, p_s$ называется точка

$$p = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1.$$

Аффинной оболочкой $\mathrm{Aff}\, M$ множества точек M называется множество всех их аффинных комбинаций. Доказать выпуклость множества $\mathrm{Aff}\, M$.

1.4. *Конической*, или *неотрицательной*, *комбинацией* заданных векторов $p_1, p_2, \ldots, p_s$ называется вектор

$$p = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i, \quad \text{где} \quad \alpha_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Конической оболочкой $\mathrm{Cone}\, M$ множества векторов M называется множество всех их неотрицательных комбинаций. Доказать выпуклость множества $\mathrm{Cone}\, M$.

1.5. Дать геометрическую интерпретацию множествам $\mathrm{Aff}\, M$, $\mathrm{Cone}\, M$, $\mathrm{Conv}\, M$, если $M = \{p_1, \ldots, p_s\}$, $x_i \in \mathbf{R}^n$ $(i = 1, \ldots, s)$ и $1 \leq s \leq 4$, $1 \leq n \leq 3$.

1.6. Пусть A — квадратная невырожденная $n \times n$ матрица, q — вектор-столбец высоты n. Отображение, ставящее каждому вектору x из $\mathbf{R}^n$ вектор $Ax + q$ называется *аффинным преобразованием* пространства $\mathbf{R}^n$. Доказать, что при аффинном преобразовании выпуклое множество переходит в выпуклое множество.

1.7. Пусть Y и Z — множества точек. Их *суммой* называется множество

$$Y + Z = \{x : \; x = y + z, \; y \in Y, \; z \in Z\}.$$

Доказать, что сумма выпуклых множеств есть выпуклое множество.

1.8. Пусть D — симметричная положительно определенная матрица. Доказать выпуклость *эллипсоида* $\left\{x : x^\top Dx \leq\right\} 1$. (Указание: использовать задачу 1.6 и утверждение 1.9).

1.9. Доказать, что сумма выпуклых функций — выпукла. Верно ли это для произведения выпуклых функций?

1.10. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция. Выпукла ли функция $|f(x)|$?

1.11. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция. Является ли выпуклым множество $\{x : f(x) \geq \alpha\}$?

1.12. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — выпуклые функции. Можно ли утверждать, что функции min $\{f(x), g(x)\}$ и max $\{f(x), g(x)\}$ — выпуклы?

1.13. Доказать, что множество минимумов в задаче выпуклого программирования выпукло.

1.14. Показать оптимальность точки $x = 0$ для задачи:

$$\max(x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 0, \\ 0 \leq x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

1.15. Решить ЗЛП

$$\max({}_1x_1 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots a_nx_n \leq b, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

где

$$c_j > 0, \quad a_j > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad b > 0. \tag{13}$$

Сколько арифметических операций достаточно выполнить для нахождения оптимального вектора? Что изменится, если входные данные не удовлетворяют условиям (13)?

Глава 2

Симплекс-метод

2.1. Числовой пример

Пример 2.1. Рассмотрим ЗЛП

$$\max(2x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 32, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 17, \\ x_1 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 5). \end{cases} \tag{14}$$

Для ее решения введем новую переменную

$$x_0 = 2x_1 + x_2.$$

Задача теперь заключается в максимизации линейной функции x_0 при ограничениях

$$\begin{cases} x_0 - 2x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 32, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 17, \\ \boxed{x_1} + x_5 = 5, \end{cases} \tag{15}$$

и требованиях неотрицательности:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 5). \tag{16}$$

Роль переменной, помещенной в рамку, будет ясна в дальнейшем.

В системе линейных уравнений (15) уже выделены *базисные* (*связанные*) переменные x_0, x_3, x_4, x_5 и *небазисные* (*свободные*) переменные x_1, x_2. Выразим базисные переменные через небазисные:

$$\begin{cases} x_0 = 2x_1 + x_2, \\ x_3 = 32 - 3x_1 - 4x_2, \\ x_4 = 17 - 3x_1 - x_2, \\ x_5 = 5 - x_1. \end{cases} \tag{17}$$

Обращая небазисные переменные в нуль, по формулам (17) получим частное решение системы уравнений $\widetilde{x} = (0, 0, 32, 17, 5)^\top$ и значение целевой функции $\widetilde{x}_0 = 0$. Заметим, что это решение удовлетворяет требованиям неотрицательности (16) (это произошло из-за того, что правая часть в системе (15) неотрицательна). Таким образом, $\widetilde{x}$ — это допустимый вектор задачи (14).

Этот вектор не является оптимальным. Действительно, в выражении x_0 в (17) переменные x_1 и x_2 входят с неотрицательными коэффициентами, поэтому значение целевой функции x_0 можно увеличить за счет увеличения x_1 и/или x_2. Увеличивая x_1 и/или x_2, мы, конечно, должны соблюсти условия (15, 16).

Попробуем увеличить x_0, увеличивая x_1, оставляя x_2 равным 0 и соблюдая ограничения (15) или эквивалентные им равенства (17). Выражение для x_3 в (17) позволяет увеличить x_1 до $^{32}\!/_3$ (напомним, что $x_3 \geq 0$). Из тех же соображений выражение для x_4 в (17) позволяет увеличить x_1 до $^{17}\!/_3$, а выражение для x_5 позволяет увеличить x_1 до 5. Так как

$$\min\left\{ {}^{32}\!/_3, \frac{17}{3}, 5 \right\} = 5,$$

то на данном этапе x_1 может принять лишь значение 5.

Итак, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. Значения остальных переменных можно получить по формулам (17): $x_0 = 10$, $x_3 = 17$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$. Мы получили допустимый вектор и значение целевой функции на нем:

$$\widetilde{x} = (5, 0, 17, 2, 0), \quad \widetilde{x}_0 = 10. \tag{18}$$

Те же значения можно получить иным способом. Подставляя выражение для x_2 из (17) в уравнения (16) и приводя подобные, получим новую систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_0 \quad - \quad x_2 \qquad\qquad + 2x_5 = 10, \\ \qquad 4x_2 + x_3 \qquad - 3x_5 = 17, \\ \qquad \boxed{x_2} \qquad + x_4 - 3x_5 = \ \ 2, \\ \quad x_1 \qquad\qquad\qquad + \ \ x_5 = \ \ 5. \end{cases} \tag{19}$$

Конечно, более легкий (и грамотный) способ получения системы (19) из (16) состоит в применении одного шага гауссова исключения с ведущим (направляющим) элементом, заключенным в рамку. Теперь базисными переменными являются x_0, x_1, x_3, x_4, а небазисными переменными являются x_2, x_5. Как и раньше, выразим базисные переменные через небазисные. Получим:

$$\begin{cases} x_0 = 10 + \ \ x_2 - 2x_5, \\ x_3 = 17 - 4x_2 + 3x_5, \\ x_4 = \ \ 2 - \ \ x_2 + 3x_5, \\ x_1 = \ \ 5 \qquad\quad - \ \ x_5. \end{cases} \tag{20}$$

Полагая небазисные переменные равными нулю, по формулам (19) получим тот же допустимый вектор и то же значение целевой функции, что и в (18).

В выражении x_0 через x_2 и x_5 из (20) переменная x_2 входит с положительным коэффициентом, поэтому значение x_0 может быть увеличено за счет увеличения x_2 до величины

$$\min\left\{\frac{17}{4}, 2\right\} = 2.$$

Чтобы получить новый допустимый вектор, сразу от системы (19) с помощью шага исключения Гаусса с ведущим элементом, заключенным в рамку, перейдем к системе

$$\begin{cases} x_0 \qquad\qquad\qquad\qquad x_4 - \quad x_5 = 12, \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 4x_4 + \boxed{9x_5} = \ \ 9, \\ \qquad\quad x_2 \qquad + x_4 - \ \ 3x_5 = \ \ 2, \\ \quad x_1 \qquad\qquad\qquad + \quad x_5 = \ \ 5, \end{cases} \tag{21}$$

откуда

$$\begin{cases} x_0 = 12 - \ \ x_4 + \ \ x_5, \\ x_3 = \ \ 9 + 4x_4 - 9x_5, \\ x_2 = \ \ 2 - \ \ x_4 + 3x_5, \\ x_1 = \ \ 5 \qquad\quad - \ \ x_5. \end{cases} \tag{22}$$

Полагая небазисные переменные x_4, x_5 равными 0, получим новый допустимый вектор и значение целевой функции:

$$\widetilde{x} = (5, 2, 9, 0, 0), \quad \widetilde{x}_0 = 12.$$

Анализируя (23), приходим к выводу, что значение x_0 может быть еще увеличено за счет увеличения x_5 до величины, равной

$$\min\{1, 5\} = 1.$$

Делая в (21) шаг исключения Гаусса над элементом, заключенным в рамку, получим новую систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_0 \qquad\qquad\quad {}^1\!/_9\, x_3 + {}^5\!/_9\, x_4 \qquad\quad = 13, \\ \qquad\qquad\qquad\; {}^1\!/_9\, x_3 - {}^4\!/_9\, x_4 + x_5 = \;\; 1, \\ \qquad\qquad x_2 + {}^1\!/_3\, x_3 - {}^1\!/_3\, x_4 \qquad\quad = \;\; 5, \\ \qquad x_1 \qquad - {}^1\!/_9\, x_3 + {}^4\!/_9\, x_4 \qquad\quad = \;\; 4, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_0 = 13 - {}^1\!/_9\, x_3 - {}^5\!/_9\, x_4, \\ x_5 = \;\; 1 - {}^1\!/_9\, x_3 + {}^4\!/_9\, x_4, \\ x_2 = \;\; 5 - {}^1\!/_3\, x_3 + {}^1\!/_3\, x_4, \\ x_1 = \;\; 4 + {}^1\!/_9\, x_3 - {}^4\!/_9\, x_4. \end{cases} \tag{23}$$

Полагая небазисные переменные x_3, x_4 равными 0, получим новый допустимый вектор и значение целевой функции:

$$\widehat{x} = (4, 5, 0, 0, 1), \quad \widehat{x}_0 = 13.$$

В выражении для x_0 из (23) переменные x_3 и x_4 входят с отрицательными коэффициентами, поэтому, так как $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, то $x_0 \geq 13$. Итак, значение целевой функции на любом допустимом векторе не меньше 13 и на векторе $\widehat{x}$ значение 13 достигается, следовательно, этот вектор оптимальный.

Метод, с помощью которого мы решили данную задачу, носит название *симплекс-метод*. Перейдем к его общему описанию.

2.2. Симплекс-метод в строчечной форме

Рассмотрим каноническую ЗЛП (9). Воспользуемся матричной формой ее записи:

$$\max cx$$

$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{24}$$

Определение 2.2. Максимальная линейно независимая система столбцов матрицы называется ее (*столбцовой*) *базой*.

Пусть ранг матрицы A равен числу ее строк m. В этом случае множество столбцов образует базу тогда и только тогда, когда матрица B, составленная из этих столбцов, квадратная и невырожденная, т. е. $\det B \neq 0$. Если это так, то матрица B называется *базисной подматрицей*.

Определение 2.3. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_m$ — номера столбцов матрицы A, составляющих некоторую базу. Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ называются *базисными* переменными системы $Ax = b$.

Обозначим

$$\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$$

перестановку (упорядоченный набор) номеров базисных переменных. Для краткости $\mathscr{B}$ также будем называть *базой*.

Из курса линейной алгебры хорошо известно, что с помощью элементарных преобразований систему уравнений можно привести к упрощенному эквивалентному виду, в котором базисная переменная x_{j_i} встречается только в i-ом уравнении ($j_i \in \mathscr{B}$) и, следовательно, может быть выражена через небазисные. Положив все небазисные переменные равными 0, получим некоторые значения базисных переменных, удовлетворяющих системе.

Определение 2.4. Решение x системы уравнений, в котором все небазисные переменные равны нулю, называется *базисным* решением. Если все компоненты базисного решения неотрицательны, то оно называется *допустимым базисным решением*, или *опорным планом*, при этом сама база $\mathscr{B}$ также называется *допустимой*.

Пусть система уравнений приведена к упрощенному виду

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j = q_{i0} \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \text{где} \quad q_{ij_i} = 1, \quad q_{kj_i} = 0 \quad (j_i \in \mathscr{B}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i\}).\end{gathered} \tag{25}$$

Введем новую переменную x_0 и дополнительное ограничение

$$x_0 - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0.$$

Вычитая кратные остальных уравнений, избавимся в нем от базисных переменных. Получим эквивалентное ограничение

$$x_0 + q_{01}x_1 + q_{02}x_2 + \ldots + q_{0n}x_n = q_{00}, \quad \text{где} \quad q_{0j_i} = 0 \quad (j_i \in \mathscr{B}). \tag{26}$$

Итак, задача максимизации x_0 при ограничениях (25), (26), эквивалентна исходной задаче.

Пусть, например, $\mathscr{B} = \langle 1, 2, \ldots, m \rangle$, тогда ограничения (25), (26) имеют вид

$$\begin{cases} x_0 \qquad\qquad\qquad + q_{0,m+1}x_{m+1} + \ldots + q_{0n}x_n = q_{00}, \\ \quad x_1 \qquad\qquad + q_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + q_{1n}x_n = q_{10}, \\ \qquad x_2 \qquad + q_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + q_{2n}x_n = q_{20}, \\ \qquad\quad \ddots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_m + q_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + q_{mn}x_n = q_{m0}, \end{cases}$$

и текущее базисное решение есть $\widetilde{x} = (q_{10}, \ldots, q_{m0}, 0, \ldots, 0)^\top$.

Определение 2.5. Матрица $Q = (q_{ij})$ $(i = 0, 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, n)$[1], составленная из коэффициентов системы (25), (26), называется *симплекс-таблицей*, соответствующей базе $\mathscr{B}$. Симплекс-таблица называется *допустимой*, или *прямо допустимой*, если $q_{i0} \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Определение 2.6. Элементы $-q_{0j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ нулевой строки симплекс-таблицы Q называются *относительными оценками*. Вектор $\widehat{c} = (q_{01}, q_{02}, \ldots, q_{0n})$ называется *вектором относительных оценок*.

[1]Обратим внимание, что нумерация строк и столбцов симплекс-таблицы начинается с нуля. Строку и столбец с номером 0 мы будем называть нулевыми. В отличие от них строки и столбцы, заполненные нулями, будем называть 0-строками и 0-столбцами.

Заметим, что по базе $\mathscr{B}$ таблица Q определяется единственным образом (напомним, что порядок следования элементов в $\mathscr{B}$ зафиксирован).

Упражнение 2.7. Что произойдет с таблицей Q, если в $\mathscr{B}$ переставить некоторые элементы? Показать, в частности, что при этом текущее базисное решение, а, значит, и q_{00} не изменится.

Очевидно следующее

Утверждение 2.8. *Пусть базисное решение* $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)^\top$ *и симплекс-таблица* $Q = (q_{ij})$ *соответствуют базе* $\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$*, тогда*

1) $\widetilde{x}_{j_i} = q_{i0}$*, если* $j_i \in \mathscr{B}$*, и* $\widetilde{x}_j = 0$*, если* $j \notin \mathscr{B}$*;*
2) *значение целевой функции на векторе* $\widetilde{x}$ *равно* $c\widetilde{x} = -q_{00}$*;*
3) *симплекс-таблица* Q *допустима, тогда и только тогда, когда база* $\mathscr{B}$ *допустима.*

Определение 2.9. Базы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}'$ называются *соседними*, если $|\mathscr{B} \cap \mathscr{B}'| = m - 1$.

Симплекс-метод переходит от одной допустимой базы к соседней допустимой базе, при этом не уменьшая значение целевой функции на текущем базисном решении, до тех пор, пока не найдет оптимального вектора.

Симплекс-метод был предложен Данцигом в 1947 г. Предшественниками этого алгоритма были методы, предложенные Фурье[2] в 1823 г. и Валле Пуссеном[3] в 1911 г. Канторович в 1939 г. предложил метод, по существу, являющийся двойственным симплекс-методом (см. раздел 3.6).

Алгоритм 1. [Прямой симплекс-метод в строчечной форме.][4]

Шаг 0. Начать с допустимой базы[5] $\mathscr{B}$ и соответствующей ей допустимой таблицы Q.

---

[2]Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) — французский математик и физик.

[3]Шарль Жан Ла Валле Пуссен (1866–1962) — бельгийский математик.

[4]Заметим, что описываемая процедура не выдерживает требований, обычно предъявляемых к алгоритму: не все действия заданы однозначно. Таким образом, речь идет не об одном алгоритме, а об их семействе. В дальнейшем неоднозначности будут конкретизироваться. Данное замечание относится почти к любой процедуре, описанной в пособии.

[5]Способы построения начальной допустимой базы рассматриваются в разделе 2.4.

Шаг 1. Если $q_{0j} \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, конец. Базисное решение, соответствующее базе $\mathscr{B}$, оптимально. Иначе выбрать такое s, что $q_{0s} < 0$.

Шаг 2. Если $q_{is} \leq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, конец. Значение целевой функции не ограничено. Иначе выбрать такое r, что.

$$\frac{q_{r0}}{q_{rs}} = \min\left\{\frac{q_{i0}}{q_{is}} : \quad q_{is} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\right\}. \tag{27}$$

Шаг 3. (Шаг гауссова преобразования.) Поделить r-ую строку матрицы Q на q_{rs}. Для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, m\} \setminus \{r\}$ вычесть из i-ой строки r-ую, умноженную на q_{is}.

Шаг 4. В $\mathscr{B} = \langle j_1, \ldots, j_m\rangle$ в качестве j_r взять s. Вернуться на шаг 1.

Заметим, что выбор s и r по приведенным в алгоритме правилам в общем случае неоднозначен. Правила выбора уточняются в разделе 2.3.

Определение 2.10. Переход от текущей базы к соседней в алгоритме 1 называется *итерацией* симплекс-метода. Столбец s, строка r и элемент q_{rs} в симплекс-методе называются *направляющими*, или *ведущими*.

Заметим, что шаг 3 симплекс-метода представляет собой одну итерацию гауссова исключения в системе (25), (26) с направляющим (ведущим) элементом q_{rs}.

Определение 2.11. База $\mathscr{B}$ и соответствующее базисное решение $\widetilde{x}$ называются *невырожденными*, если среди базисных компонент $\widetilde{x}$ нет нулей. В противном случае $\mathscr{B}$ и $\widetilde{x}$ называются *вырожденными*. ЗЛП в форме (24) называется *невырожденной*, если все ее допустимые базы являются невырожденными. В противном случае ЗЛП называется вырожденной.

Следующее утверждение показывает, что если симплекс-метод завершил свою работу, то в результате найден оптимальный вектор. Также будет дано несколько важных свойств симплекс-метода, которые мы будм использовать в дальнейшем.

Утверждение 2.12.

1) *Преобразования шага* 3 *алгоритма* 1 *не меняют множества решений системы* (25). *Эти преобразования заменяют базисную переменную* x_{j_r} *на* x_s.

2) *На каждой итерации алгоритма* 1 *таблица* Q *остается допустимой.*

3) *Если* $q_{0j} \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, *то текущее базисное решение оптимально.*

4) *Если для некоторого* s *справедливо* $q_{0s} < 0$ *и* $q_{is} \leq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *то значение целевой функции на множестве допустимых решений неограничено сверху.*

5) *Если* $q_{0s} < 0$ *и* $q_{rs} > 0$, *то при переходе к следующей базе значение целевой функции не уменьшается. Если, кроме того, база невырождена, то значение целевой функции строго увеличивается.*

Доказательство.

Утверждение 1) легко проверяется.

2) Элементы нулевого столбца симплекс-таблицы изменяются по формулам:

$$q'_{i0} = q_{i0} - \frac{q_{is}}{q_{rs}} q_{r0} \quad (i = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m), \qquad q'_{r0} = \frac{q_{r0}}{q_{rs}}.$$

В силу равенства (27) справедливо $q_{i0} \geq 0$.

3) Так как $x_j \geq 0$ и $q_{0j} \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то из (26) получаем, что $x_0 \leq q_{00}$. С другой стороны, текущее базисное решение $\widetilde{x}$ дает значение целевой функции равное q_{00}, следовательно, $\widetilde{x}$ — оптимально.

4) В системе (25), (26) положим все небазисные переменные, кроме x_s, равными нулю. Тогда получим

$$\begin{cases} x_0 &= q_{00} - q_{0s} x_s, \\ x_{j_1} &= q_{10} - q_{1s} x_s, \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_{j_m} &= q_{m0} - q_{ms} x_s. \end{cases}$$

Так как $q_{0s} < 0$ и $q_{is} \leq 0$, то при любом положительном x_s по этим формулам можно найти допустимый вектор, причем при неограниченном увеличении x_s значение целевой функции x_0 неограниченно возрастает.

5) При преобразованиях шага 3 симплекс-алгоритма значение целевой функции пересчитывается по формулам

$$q'_{00} = q_{00} - \frac{q_{0s}}{q_{rs}} q_{r0}.$$

Так как $q_{0s} < 0$, $q_{rs} > 0$, $q_{r0} \geq 0$, то $q'_{00} \geq q_{00}$. Если текущая база невырождена, то $q_{r0} > 0$ и поэтому $q'_{00} > q_{00}$. ▮

Пример 2.13. Решим строчечным симплекс-методом ЗЛП

$$\max(2x_2 - x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, 4). \end{cases}$$

В качестве начальной допустимой базы можно взять $\mathscr{B}^{(0)}\,\{3, 4\}$, ей будет соответствовать следующая таблица:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ \hline 6 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Вычитая из нулевой строки первую и прибавляя вторую, получим следующую симплекс-таблицу:

$$\mathscr{B}^{(0)}\,\{3, 4\}, \qquad Q^{(0)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 6 & \boxed{2} & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

В качестве номера направляющего столбца можно выбрать $s = 1$ или $s = 2$. Пусть $s = 1$. Пусть $s = 1$. Так как $\min\{6/2, 6/1\}$ достигается на первом элементе, то в качестве направляющей строки берем строку с номером $r = 1$. Таким образом, очередная база равна $\mathscr{B}^{(1)} = \langle 1, 4 \rangle$.

Разделим первую строку на 2 и прибавим ее к нулевой строке, а затем вычтем из второй. Получаем:

$$\mathscr{B}^{(1)} = \langle 1, 4 \rangle\,, \qquad Q^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 3 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 0 & \boxed{3/2} & -1/2 & 1 \end{array}\right).$$

Наличие отрицательного элемента в нулевой строке заставляет продолжить процесс. Теперь $s = 2$ и $r = 2$ находятся однозначно. Следовательно, $\mathscr{B}^{(2)} = \langle 1, 2 \rangle$. В результате элементарных преобразований получим:

$$\mathscr{B}^{(2)} = \langle 1, 2 \rangle\,. \qquad Q^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 4 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 2 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right).$$

Таблица оптимальна. Оптимальный вектор равен $(2, 2, 0, 0)^\top$. Оптимальное значение целевой функции равно 4.

Перейдем к вопросу о конечности симплекс-метода. Вначале рассмотрим невырожденную ЗЛП. Полностью вопрос о конечности симплекс-метода будет решен в разделе 2.3.

Теорема 2.14. *Симплекс-метод, примененный к невырожденной ЗЛП, конечен, т. е. завершается за конечное число итераций.*

Доказательство. По пункту 5) утверждения 2.12 значение целевой функции невырожденной ЗЛП на каждой итерации строго уменьшается. Следовательно, базы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}'$, соответствующие различным итерациям, составляют два различных m-элементных подмножества n-элементного множества. Таким образом, число итераций не превосходит

$$\frac{n!}{(n-m)!\, m!},$$

следовательно, в условиях теоремы симплекс-метод конечен. ∎

Итак, симплекс-метод — это направленный перебор баз. В вычислительном отношении можно использовать метод Гаусса со специальным выбором направляющего элемента, обеспечивающим этот перебор.

2.3. Зацикливание и способы защиты от него

2.3.1. Зацикливание

Выбор столбца, вводимого в базу, и столбца, выводимого из базы, в симплекс-методе определен, вообще говоря, неоднозначно. Желательно конкретизировать этот выбор так, чтобы любая ЗЛП решалась как можно быстрее. Однако надеяться на точное решение такой «сверхзадачи» трудно, и поэтому приходится использовать такие приемы, от которых требуется, чтобы, во-первых, любая ЗЛП решалась за конечное число итераций, и, во-вторых, это число итераций по каким-то эвристическим соображениям[6] было бы «не очень большим» хотя бы в большинстве случаев.

Пусть $Q = (q_{ij})$ — симплекс-таблица, соответствующая допустимой базе $\mathscr{B}$. Обычно применяется один из следующих критериев для выбора номера s направляющего столбца (шаг 1 алгоритма 1):

α_1 Выбрать $s = \min\{j : q_{0j} < 0\}$.

α_2 Выбрать s, такое, что $q_{0s} = \min\{q_{0j} : q_{0j} < 0\}$. Если таких s несколько, то выбрать среди них наименьшее.

α_3 Выбрать s, такое, что $\theta_s = \max\{\theta_j : q_{0j} < 0\}$, где

$$\theta_j = \min\left\{\frac{q_{i0}}{q_{ij}} : \quad q_{ij} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Если таких s несколько, то выбрать среди них наименьшее.

Первый из этих критериев — самый простой. Третий дает наибольшее увеличение целевой функции за одну итерацию симплекс-метода. Второй занимает промежуточное положение между первым и третьим. Он обещает наибольшее увеличение целевой функции при увеличении x_s на 1.

[6]Используемые в алгоритмах правила, не имеющие теоретического обоснования своей эффективности, но дающие хорошие результаты на практике называются *эвристиками*.

Если номер s направляющего столбца выбран, то простое правило выбора номера r направляющей строки (шаг 2 алгоритма 1) можно сформулировать так:

β_1 Среди индексов i, на которых достигается минимум

$$\min\left\{\frac{q_{i0}}{q_{is}}:\quad q_{is}>0\quad (i=1,2,\ldots,m)\right\}. \tag{28}$$

выбрать наименьший.

Пример 2.15. Начиная с допустимой базы $\{2,3,4,5\}$ применить симплекс-метод с критериями α_1 и β_1 к ЗЛП

$$\max\{200x_5+175x_6-1100x_7-2x_8\}$$

$$\begin{cases} x_2-3x_5-{}^5\!/_4\,x_6+7x_7+{}^1\!/_{50}\,x_8=0,\\ x_1+{}^1\!/_3\,x_5+{}^1\!/_6\,x_6-x_7-{}^1\!/_{50}\,x_8=0,\\ x_3+{}^{75}\!/_2\,x_5-{}^{25}\!/_4\,x_6+{}^{175}\!/_2\,x_7+{}^1\!/_4\,x_8=0,\\ x_4+x_8=1,\\ x_j\ge 0\quad (j=1,2,\ldots,8). \end{cases}$$

Процесс решения опишем последовательностью симплекс-таблиц, помечая направляющий элемент и выписывая номера базисных векторов на каждой итерации.

$$\mathscr{B}^{(0)}=\langle 2,1,3,4\rangle\,,$$

$$Q^{(0)}=\left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & -175 & 1100 & 2\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -{}^5\!/_4 & 7 & {}^1\!/_{50}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{{}^1\!/_3} & {}^1\!/_6 & -1 & -{}^1\!/_{50}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & {}^{75}\!/_2 & -{}^{25}\!/_4 & {}^{175}\!/_2 & {}^1\!/_4\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(1)} = \langle 2, 5, 3, 4 \rangle\,,$$

$$Q^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 600 & 0 & 0 & 0 & 0 & -75 & 500 & -2 \\ \hline 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1/4} & -2 & -1/25 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -3 & -1/50 \\ 0 & -225/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -25 & 200 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(2)} = \langle 6, 5, 3, 4 \rangle\,,$$

$$Q^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 3300 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & -14 \\ \hline 0 & 36 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -4/25 \\ 0 & -15 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 3/50 \\ 0 & 1575/2 & 100 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(3)} = \langle 6, 7, 3, 4 \rangle\,,$$

$$Q^{(3)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 1800 & 100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & -8 \\ \hline 0 & -84 & -12 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & \boxed{8/25} \\ 0 & -15 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3/50 \\ 0 & 1575/2 & 100 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(4)} = \langle 8, 7, 3, 4 \rangle\,,$$

$$Q^{(4)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & -300 & -200 & 0 & 0 & 300 & 25 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -525/2 & -75/2 & 0 & 0 & 25 & 25/8 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{3/4} & 1/4 & 0 & 0 & -1/2 & -3/16 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25/2 & 1 & 0 & 75 & 75/8 & 0 & 0 \\ 1 & 525/2 & 75/2 & 0 & 1 & -25 & -25/8 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(5)} = \langle 8, 1, 3, 4 \rangle\,,$$

$$Q^{(5)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & -100 & 0 & 0 & 100 & -50 & 400 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{50} & 0 & 0 & -150 & -125/2 & 350 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & -2/3 & -1/4 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -25/2 & 1 & 0 & 75 & 75/8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -50 & 0 & 1 & 150 & 125/2 & -350 & 0 \end{array}\right).$$

Далее $\mathscr{B}^{(6)} = \mathscr{B}^{(0)}$ и, следовательно, произошло так называемое *зацикливание* и процесс бесконечен. В следующей таблице для каждой итерации приведены значения $\mathscr{B}$, s, I, r. Через I обозначено множество тех i, для которых достигается минимум в (28).

№	$\mathscr{B}$	s	I	r
0	$\langle 2, 1, 3, 4 \rangle$	5	$\{2, 3\}$	2
1	$\langle 2, 5, 3, 4 \rangle$	6	$\{1, 2\}$	1
2	$\langle 6, 5, 3, 4 \rangle$	7	$\{2\}$	2
3	$\langle 6, 7, 3, 4 \rangle$	8	$\{1, 2\}$	1
4	$\langle 8, 7, 3, 4 \rangle$	1	$\{2\}$	2
5	$\langle 8, 1, 3, 4 \rangle$	2	$\{1, 2\}$	2
6	$\langle 2, 1, 3, 4 \rangle$			

Не спасает и использование других критериев α_2 и α_3 выбора i, так как в рассматриваемом примере они приводят к одному и тому же результату.

Замечание 2.16. Предположим, что вычислительный процесс бесконечен. Поскольку число баз конечно, то, начиная с некоторой итерации, произойдет *зацикливание*, т. е. начнется повторение баз:

$$\mathscr{B}^{(k)}, \mathscr{B}^{(k+1)}, \ldots, \mathscr{B}^{(k+l)} = \mathscr{B}^{(k)}.$$

Так как значение целевой функции на текущем базисном решении в симплекс-методе не убывает, то зацикливание может произойти, только если элемент q_{00} симплексной таблицы не изменяется. Это означает, что задача вырождена, а именно $q_{r0} = 0$, где r — номер направляющей строки.

Отсюда получаем, что если зацикливание произошло, то весь нулевой столбец симплекс-таблицы не изменяется, и, следовательно, всем этим базам соответствует один и тот же допустимый базисный вектор.

Вычислительные процедуры, гарантирующие от зацикливания, разобраны ниже.

2.3.2. Лексикографический метод

Определение 2.17. Говорят, что вектор q *лексикографически положителен* (обозначение: $q \succ 0$), если его первая отличная от нуля компонента положительна. Пусть векторы p и q имеют одинаковую размерность. Вектор q *лексикографически больше* вектора p (обозначение: $q \succ p$), если $q - p \succ 0$.

Определение 2.18. Пусть $\mathscr{R}$ — конечное множество векторов одинаковой размерности. Вектор q назовем *лексикографически минимальным* (обозначение: $q = \operatorname{lexmin} \mathscr{R}$), если для всякого $p \in \mathscr{R}$, $p \neq q$, справедливо $p \succ q$.

Сформулируем *лексикографический критерий* выбора номера r направляющей строки на шаге 2 алгоритма 1:

β_2 Выбрать r, такое, что

$$\left(\frac{q_{r0}}{q_{rs}}, \frac{q_{r1}}{q_{rs}}, \ldots, \frac{q_{rn}}{q_{rs}}\right) = \operatorname{lexmin} \left\{ \left(\frac{q_{i0}}{q_{is}}, \frac{q_{i1}}{q_{is}}, \ldots, \frac{q_{in}}{q_{is}}\right) : \quad q_{is} > 0 \right\}.$$

Так как матрица Q не содержит пропорциональных строк, то выбор r по критерию β_2 определен однозначно.

Определение 2.19. Симплексная таблица Q называется *лексикографически допустимой*, или *$\mathscr{L}$-допустимой*, если все ее строки, кроме, быть может, нулевой, лексикографически положительны.

Заметим, что с помощью перестановки столбцов и/или добавления искусственных переменных из любой симплекс-таблицы можно получить лексикографически допустимую.

Лемма 2.20. *Если на шаге* 2 *алгоритма* 1 *для выбора номера направляющей строки используется критерий β_2, то свойство лексикографической допустимости симплекс-таблицы сохраняется.*

Доказательство. Очевидно, что r-ая (направляющая) строка остается лексикографически положительной, в то время как i-ая строка ($i = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m$), заменяется на строку

$$(q_{i0}, q_{i1}, \ldots, q_{in}) - q_{is} \cdot \left(\frac{q_{r0}}{q_{rs}}, \frac{q_{r1}}{q_{rs}}, \ldots, \frac{q_{rn}}{q_{rs}} \right). \tag{29}$$

Если $q_{is} < 0$, то к лексикографически положительной строке прибавляется лексикографически положительная, поэтому результат лексикографически положителен. Если $q_{is} > 0$, то запишем (29) как

$$q_{is} \cdot \left[\left(\frac{q_{i0}}{q_{is}}, \frac{q_{i1}}{q_{is}}, \ldots, \frac{q_{in}}{q_{is}} \right) - \left(\frac{q_{r0}}{q_{rs}}, \frac{q_{r1}}{q_{rs}}, \ldots, \frac{q_{rn}}{q_{rs}} \right) \right].$$

В квадратных скобках стоит лексикографически положительный вектор, который умножается на положительное число. Результат лексикографически положителен. ∎

Определение 2.21. Алгоритм 1, в котором номер s направляющего столбца выбирается произвольно, но так, что $q_{0s} < 0$, а номер r направляющей строки выбирается по критерию β_2 называется *лексикографическим симплекс-методом* в строчечной форме, или *$\mathscr{L}$-методом*.

Теорема 2.22. *Лексикографический симплекс-метод в строчечной форме, примененный к лексикографически допустимой таблице, конечен.*

Доказательство. По лемме 2.20, все таблицы, появляющиеся в лексикографическом симплекс-методе, являются лексикографически допустимыми. На каждой итерации симплекс-метода к нулевой строке прибавляется лексикографически положительная строка. Таким образом, при переходе от базы к базе происходит лексикографическое увеличение нулевой строки симплекс-таблицы, и, следовательно, зацикливание невозможно. ∎

Пример 2.23. Проиллюстрируем лексикографический симплекс-метод на ЗЛП из примера 2.15. Будем выбирать номер направляющего элемента по критериям α_1, β_2. Начальная база равна $\mathscr{B}^{(0)} = \langle 2, 1, 3, 4 \rangle$.

$$\mathscr{B}^{(1)} = \langle 2, 1, 5, 4 \rangle ,$$

$$Q^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 16/3 & 0 & 0 & -625/3 & 4700/3 & 10/3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2/25 & 0 & 0 & -7/4 & 14 & 1/25 \\ 0 & 1 & 0 & -2/225 & 0 & 0 & \boxed{2/9} & -16/9 & -2/225 \\ 0 & 0 & 0 & 2/75 & 0 & 1 & -1/6 & 7/3 & 1/150 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(2)} = \langle 2, 6, 5, 4 \rangle ,$$

$$Q^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 1875/2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & -100 & -5 \\ \hline 0 & 63/8 & 1 & 1/100 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/100 \\ 0 & 9/2 & 0 & -1/25 & 0 & 0 & 1 & -8 & -1/25 \\ 0 & 3/4 & 0 & \boxed{1/50} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(3)} = \langle 2, 6, 3, 4 \rangle ,$$

$$Q^{(3)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 1050 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 50 & -5 \\ \hline 0 & 15/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & -3/100 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -6 & -1/25 \\ 0 & 75/2 & 0 & 1 & 0 & 50 & 0 & 50 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(4)} = \langle 2, 6, 3, 8 \rangle ,$$

$$Q^{(4)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 5 & 1050 & 0 & 0 & 5 & 150 & 0 & 50 & 0 \\ \hline 3/100 & 15/2 & 1 & 0 & 3/100 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/25 & 6 & 0 & 0 & 1/25 & 2 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 75/2 & 0 & 1 & 0 & 50 & 0 & 50 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Итак, оптимальное решение равно $(0, {}^3\!/_{100}, 0, 0, 0, {}^1\!/_{25}, 0, 1)^\top$. В следующей таблице, как и в примере 2.15, для каждой итерации приведены значения $\mathscr{B}$, s, I, r:

№	$\mathscr{B}$	s	I	r
0	$\langle 2,1,3,4\rangle$	5	$\{2,3\}$	3
1	$\langle 2,1,5,4\rangle$	6	$\{2\}$	2
2	$\langle 2,6,5,4\rangle$	3	$\{1,3\}$	3
3	$\langle 2,6,3,4\rangle$	8	$\{4\}$	4
4	$\langle 2,6,3,8\rangle$			

2.3.3. Правило Бленда

Пусть, как обычно, s и r — номера направляющих столбца и строки соответственно. Напомним, что s совпадает с номером переменной, вводимой в базу, а j_r равен номеру переменной, выводимой из базы, где $\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m\rangle$. Сформулируем следующий критерий выбора номера r направляющей строки:

β_3 Среди индексов i, на которых достигается минимум

$$\min\left\{\frac{q_{i0}}{q_{is}}:\quad q_{is} > 0\quad (i = 1, 2, \ldots, m)\right\},$$

выбрать r, для которого j_r минимально.

Определение 2.24. Симплекс-метод, в котором номер направляющего столбца выбирается по правилу α_1, а номер направляющей строки — по правилу β_3 называется *симплекс-методом с правилом Бленда*[7].

Замечание 2.25. Правило Бленда можно также сформулировать следующим образом:

1) Из переменных, вводимых в базу, выбери переменную с наименьшим номером.

2) Из переменных, выводимых из базы, выбери переменную с наименьшим номером.

[7]Роберт Гэри Бленд — американский математик.

Теорема 2.26. *Симплекс-метод с правилом Бленда конечен.*

Доказательство. Предположим, что зацикливание произошло. Среди всех номеров, которые исключались из базы (и, следовательно, включались в базу) во время цикла, найдем максимальный и обозначим его t. Пусть t был исключен из базы на h-ой итерации и включен в базу на g-ой итерации. Обозначим через s номер, вводимый в базу на h-ой итерации. Имеем $s < t$. Обозначим $\mathscr{B} = \langle j_1, \ldots, j_m \rangle$, $Q = (q_{ij})$ — соответственно базу и симплекс-таблицу на h-ой итерации и $\mathscr{B}'$, $Q' = (q'_{ij})$ — соответственно базу и симплекс-таблицу на g-ой итерации.

Определим компоненты вектора $\widehat{x}$ по формулам:

$$\widehat{x}_{j_i} = q_{i0} - q_{is} \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad \widehat{x}_s = 1, \quad \widehat{x}_j = 0 \quad (j \notin \mathscr{B}, \quad j \neq s).$$

Заметим, что вектор $\widehat{x}$ не является базисным и даже допустимым, однако из рассмотрения симплекс-таблицы Q легко получить, что $\widehat{x}$ удовлетворяет системе $Ax = b$, причем

$$c\widehat{x} = q_{00} - \sum_{j=1}^{n} q_{0j}\widehat{x}_j = q_{00} - \sum_{j \notin \mathscr{B}} q_{0j}\widehat{x}_j = q_{00} - q_{0s} > q_{00}, \tag{30}$$

так как $q_{0s} < 0$. Из рассмотрения симплекс-таблицы Q' получаем:

$$c\widehat{x} = q'_{00} - \sum_{j=1}^{n} q'_{0j}\widehat{x}_j. \tag{31}$$

Согласно замечанию 2.16 имеем $q'_{00} = q_{00}$. Рассмотрим остальные слагаемые в сумме (31):

- Если $j \notin \mathscr{B}$, $j \neq s$, то $\widehat{x}_j = 0$, поэтому $q'_{0j}\widehat{x}_j = 0$.
- Если $j = s$, то $\widehat{x}_s = 1$ и, в силу правила выбора t, $q'_{0s} \geq 0$, поэтому $q'_{0j}\widehat{x}_j \geq 0$.
- Если $j \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}'$, $j \neq t$, то в силу правила выбора t, $j < t$. Из замечания 2.16 следует, что $q_{i0} = 0$, где $j = j_i$, следовательно, $\widehat{x}_j = -q_{is}$. Однако так как $j < t$, то на h-ой итерации элемент q_{is} не может быть направляющим, поэтому $q_{is} \leq 0$, откуда $\widehat{x}_j \geq 0$. С другой стороны, так как $j < t$, то $q'_{0j} \geq 0$, поэтому $q'_{0j}\widehat{x}_j \geq 0$.

- Если $j = t$, то $q'_{0j} < 0$ и $\widehat{x}_j = -q_{is}$, где $t = j_i$. На h-ой итерации элемент q_{is} — направляющий, поэтому $\widehat{x}_j = -q_{is} < 0$, откуда $q'_{0j}\widehat{x}_j > 0$.

- Если $j \in \mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$, то $q_{0j} = q'_{0j} = 0$, поэтому $q'_{0j}\widehat{x}_j = 0$.

Таким образом, $c\widehat{x} < q_{00}$, что противоречит неравенству (30). ∎

Пример 2.27. Проиллюстрируем симплекс-метод с правилом Бленда на ЗЛП из примера 2.15. Начальная база равна $\mathscr{B}^{(0)} = \langle 2, 1, 3, 4 \rangle$. Далее, как и выше, будут построены базы $\mathscr{B}^{(1)} = \langle 2, 5, 3, 4 \rangle$, $\mathscr{B}^{(2)} = \langle 6, 5, 3, 4 \rangle$, $\mathscr{B}^{(3)} = \langle 6, 7, 3, 4 \rangle$, $\mathscr{B}^{(4)} = \langle 8, 7, 3, 4 \rangle$, $\mathscr{B}^{(5)} = \langle 8, 1, 3, 4 \rangle$. Начиная с этого момента, вместе с базой будем приводить соответствующую ей симплекс-таблицу.

$$\mathscr{B}^{(6)} = \langle 8, 2, 3, 4 \rangle\,,$$

$$Q^{(6)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc}
0 & 300 & 0 & 0 & 0 & -100 & -125 & 800 & 0 \\
\hline
0 & -150 & 0 & 0 & 0 & -50 & -25 & 150 & 1 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3/4 & 4 & 0 \\
0 & 75/2 & 0 & 1 & 0 & \boxed{50} & 0 & 50 & 0 \\
1 & 150 & 0 & 0 & 1 & 50 & 25 & -150 & 0
\end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(7)} = \langle 8, 2, 5, 4 \rangle\,,$$

$$Q^{(7)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc}
0 & 375 & 0 & 2 & 0 & 0 & -125 & 900 & 0 \\
\hline
0 & -225/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -25 & 200 & 1 \\
0 & 9/2 & 1 & 1/25 & 0 & 0 & -3/4 & 6 & 0 \\
0 & 3/4 & 0 & 1/50 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 225/2 & 0 & -1 & 1 & 0 & \boxed{25} & -200 & 0
\end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(8)} = \langle 8, 2, 5, 6 \rangle\,,$$

$$Q^{(8)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 5 & {}^{1875}\!/_2 & 0 & -3 & 5 & 0 & 0 & -100 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ {}^3\!/_{100} & {}^{63}\!/_8 & 1 & {}^1\!/_{100} & {}^3\!/_{100} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^3\!/_4 & 0 & {}^1\!/_{50} & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ {}^1\!/_{25} & {}^9\!/_2 & 0 & -{}^1\!/_{25} & {}^1\!/_{25} & 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(9)} = \langle 8, 2, 7, 6 \rangle\,,$$

$$Q^{(9)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 5 & {}^{2025}\!/_2 & 0 & -1 & 5 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ {}^3\!/_{100} & {}^{63}\!/_8 & 1 & {}^1\!/_{100} & {}^3\!/_{100} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^3\!/_4 & 0 & {}^1\!/_{50} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ {}^1\!/_{25} & {}^{21}\!/_2 & 0 & {}^3\!/_{25} & {}^1\!/_{25} & 8 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

Последняя база является оптимальной, и соответствующий ему базисный вектор равен $(0, {}^3\!/_{100}, 0, 0, 0, {}^1\!/_{25}, 0, 1)^\top$. В следующей таблице, как и в примере 2.15, для каждой итерации приведены значения $\mathscr{B}$, s, I, J, r, где $J = \{j_i : i \in I\}$:

№	$\mathscr{B}$	s	I	J	r
0	$\langle 2,1,3,4\rangle$	5	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	2
1	$\langle 2,5,3,4\rangle$	6	$\{1,2\}$	$\{2,5\}$	1
2	$\langle 6,5,3,4\rangle$	7	$\{2\}$	$\{5\}$	2
3	$\langle 6,7,3,4\rangle$	8	$\{1,2\}$	$\{6,7\}$	1
4	$\langle 8,7,3,4\rangle$	1	$\{2\}$	$\{7\}$	2
5	$\langle 8,1,3,4\rangle$	2	$\{1,2\}$	$\{8,1\}$	2
6	$\langle 8,2,3,4\rangle$	5	$\{3,4\}$	$\{3,4\}$	3
7	$\langle 8,2,5,4\rangle$	6	$\{4\}$	$\{4\}$	4
8	$\langle 8,2,5,6\rangle$	7	$\{3\}$	$\{5\}$	3
9	$\langle 8,2,7,6\rangle$				

2.4. Получение начального допустимого базисного решения

Алгоритм 1 в начале своей работы предполагает, что известна некоторая начальная допустимая база. Опишем один из способов построения такой базы, называемый *методом искусственного базиса*.

Будем считать, что в канонической ЗЛП (24) справедливо $b \geq 0$. Ясно, что это предположение не уменьшает общности, так как в противном случае уравнения с отрицательной правой частью умножим на -1. Рассмотрим ЗЛП

$$\max(-x_{n+1} - x_{n+2} - \ldots - x_{n+m})$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} & = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ddots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} & = b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m+n). & \end{cases} \tag{32}$$

Неизвестные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ называются *искусственными переменными*. Так как $b_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то база $\mathscr{B} = \langle n+1, \ldots, n+m \rangle$ допустима, и к задаче (32) можно применить алгоритм 1. Пусть $\widehat{x}$ — оптимальное решение, $\mathscr{B}$ — оптимальная база вспомогательной задачи (32), а Q — соответствующая симплексная таблица. Возможны два случая:

I. Значение целевой функции на оптимальном векторе ЗЛП (32) отрицательно. Легко видеть, что в этом случае исходная система ограничений $Ax = b$, $x \geq 0$ несовместна.

II. Значение целевой функции на оптимальном решении ЗЛП (32) равно 0. Система совместна. Рассмотрим два варианта:

   1) База $\mathscr{B}$ содержит только номера из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $\mathscr{B}$ является допустимой базой для исходной задачи.

   2) Найдется $s \in \{n+1, \ldots, n+m\}$, такое, что $s \in \mathscr{B}$. Тогда $q_{is} = 0$ $(i = 0, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m)$, $q_{rs} = 1$ для некоторого r. Так как $\widehat{x}_s = q_{r0}$, то $q_{r0} = 0$, иначе $\widehat{x}_{n+1} + \ldots + \widehat{x}_{n+m} > 0$.

а) Если $q_{rj} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), то исходная система $Ax = b$ избыточна, так как ее r-ая строка является линейной комбинацией остальных строк. Следовательно, r-ая строка из таблицы Q и из исходной системы может быть удалена.

б) Если $q_{rj} \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то в таблице Q выполним один шаг гауссова исключения с направляющим элементом q_{rj}. В результате s будет исключен из $\mathscr{B}$. После этого s-ый столбец из Q можно вычеркнуть.

После операций удаления строк и столбцов, описанных в пп. 2а) и 2б), придем к ситуации п. 1).

Описанная выше схема называется *методом искусственного базиса*, или *первым этапом* (*фазой*) симплекс-метода. Метод искусственного базиса либо устанавливает, что исходная система ограничений несовместна, либо находит начальную допустимую базу, отыскивая в исходной системе все уравнения-следствия (если они есть) и тем самым сводя задачу к случаю $\operatorname{rank} A = m$. После этого к исходной задаче применяется алгоритм 1, называемый в данном случае *вторым этапом* (*фазой*) симплекс-метода.

Пример 2.28. Продемонстрируем метод искусственного базиса на ЗЛП

$$\max(-x_1 - x_2 - 5x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Первый этап. По исходной задаче строим вспомогательную ЗЛП:

$$\max(-x_5 - x_6 - x_7)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 1, \\ 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 + x_7 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Получим следующие симплекс-таблицы:

$$\mathscr{B}^{(0)} = \langle 1, 2, 3 \rangle\,,$$

$$Q^{(0)} = \left(\begin{array}{c|ccccccc} -7 & -7 & 5 & -9 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & \boxed{5} & -4 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(1)} = \langle 1, 2, 4 \rangle\,,$$

$$Q^{(1)} = \left(\begin{array}{c|ccccccc} 0 & 0 & -3/5 & 4/5 & -4/5 & 0 & 0 & 7/5 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{9/5} & -12/5 & 12/5 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & -6/5 & 8/5 & -8/5 & 0 & 1 & -1/5 \\ 1 & 1 & -4/5 & 7/5 & 3/5 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right),$$

Заметим, что после второй итерации значение целевой функции равно 0, хотя симплекс-таблица не оптимальна[8].

$$\mathscr{B}^{(2)} = \langle 2, 4, 5 \rangle\,,$$

$$Q^{(2)} = \left(\begin{array}{c|ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 4/3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -4/3 & 4/3 & 5/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 & 5/3 & 4/9 & 0 & 1/9 \end{array}\right).$$

Таблица $Q^{(2)}$ оптимальна. Так как $q_{00} = 0$, то исходная система совместна. Так как $q_{2j} = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$), то вторая строка избыточна. Вычеркивая вторую строку и столбцы, соответствующие искусственным переменным, и приписывая коэффициенты целевой функции исходной

[8] Дальнейшую оптимизацию можно прекратить и приступить к исключению из базы столбцов с номерами меньшими чем m.

задачи, получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -4/3 & 4/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \end{array}\right).$$

В нулевой строке избавимся от базисных переменных. Для этого вычтем из нулевой строки первую и вторую:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -4/3 & 4/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \end{array}\right).$$

Таблица уже оптимальна. Получено оптимальное решение $(1, 0, 0, 0)^\top$ и значение целевой функции -1.

2.5. Матричное описание симплекс-метода

Рассмотрим каноническую ЗЛП (9) в матричной форме:

$$\max cx \qquad (33)$$
$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала случай, когда строки матрицы A линейно независимые. Пусть $\mathscr{B}$ — некоторая база матрицы A, а B — соответствующая базисная подматрица и пусть[9]

$$A = (B, N), \quad x = \begin{pmatrix} x_{\mathscr{B}} \\ x_{\mathscr{N}} \end{pmatrix}, \quad c = (c_{\mathscr{B}}, c_{\mathscr{N}}),$$

[9]Для простоты обозначений мы считаем, что B составлена из первых m столбцов матрицы A.

где через $x_{\mathscr{B}}$, $c_{\mathscr{B}}$ обозначены векторы, составленные из базисных компонент векторов x и c соответственно, а через $x_{\mathscr{N}}$, $c_{\mathscr{N}}$ обозначены векторы, составленные из небазисных компонент векторов x и c соответственно. Тогда ЗЛП (33) примет вид:

$$\max(c_{\mathscr{B}}x_{\mathscr{B}} + c_{\mathscr{N}}x_{\mathscr{N}})$$
$$\begin{cases} Bx_{\mathscr{B}} + Nx_{\mathscr{N}} = b, \\ x_{\mathscr{B}} \geq 0, \quad x_{\mathscr{N}} \geq 0. \end{cases} \tag{34}$$

Шаг исключения Гаусса на каждой итерации симплекс-метода заключается в умножении слева текущей симплексной таблицы на матрицу

$$E(r,s) = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & -q_{0s}/q_{rs} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -q_{r-1,s}/q_{rs} & & & \\ & & & 1/q_{rs} & & & \\ & & & -q_{r-1,s}/q_{rs} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -q_{r-1,s}/q_{rs} & & & 1 \end{array} \right), \tag{35}$$

где $r \neq 0$, $s \neq 0$. Следовательно, серия шагов исключения Гаусса эквивалентна домножению симплексной таблицы на произведение

$$M = E_t \cdot E_{t-1} \cdot \ldots \cdot E_1 \tag{36}$$

матриц вида (35). Нетрудно видеть, что M имеет следующее блочное строение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & F \end{pmatrix}.$$

Пусть на некоторой итерации симплекс-метода получена симплекс-таблица

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c_{\mathscr{B}} & -c_{\mathscr{N}} \\ b & B & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ub & -c_{\mathscr{B}} + uB & -c_{\mathscr{N}} + uN \\ Fb & FB & FN \end{pmatrix},$$

соответствующая базе $\mathscr{B}$. Тогда $uB - c_{\mathscr{B}} = 0$ и $FB = E$, откуда $u = c_{\mathscr{B}}B^{-1}$, $F = B^{-1}$. Итак, симплекс-таблица, соответствующая базе $\mathscr{B}$, имеет вид

$$Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{\mathscr{B}}B^{-1}b & 0 & -c_{\mathscr{N}} + c_{\mathscr{B}}B^{-1}N \\ B^{-1}b & E & B^{-1}N \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Определение 2.29. Строка $u = c_{\mathscr{B}} B^{-1}$ называется *вектором цен*, соответствующим базе $\mathscr{B}$. Компоненты вектора u называются *ценами*, или *симплекс-множителями*.

Обозначим $a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^\top$, $\widehat{a}_j = (q_{1j}, \ldots, q_{mj})^\top$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, $\widehat{b} = \widehat{a}_0$, $\widehat{a} = \widehat{a}_s$, $\widehat{c} = -(q_{01}, q_{02}, \ldots, q_{0m})$. Пусть $\widehat{c}_{\mathscr{N}} = (q_{0,i_1}, \ldots, q_{0,i_{m-n}})$, где $\mathscr{N} = \{i_1, i_2, \ldots, i_{m-n}\}$. Из (37), в частности, получаются следующие формулы для вычисления элементов симплексной таблицы, соответствующей базе $\mathscr{B}$.

Утверждение 2.30. *Справедливы следующие равенства, выражающие элементы симплексной таблицы через коэффициенты ограничений и вектор цен:*

$$q_{00} = cx = ub, \quad \widehat{b} = B^{-1} b, \quad \widehat{c} = c - uA, \quad \widehat{a} = B^{-1} a_s. \tag{38}$$

Замечание 2.31. Интерпретируя коэффициенты симплекс-таблицы (37), получим следующую эквивалентную формулировку задачи (33):

$$\begin{gathered}\max(c_{\mathscr{B}} B^{-1} b + (c_{\mathscr{N}} - c_{\mathscr{B}} B^{-1} N) x_{\mathscr{N}}) \\ \begin{cases} x_{\mathscr{B}} = B^{-1} b - B^{-1} N x_{\mathscr{N}}, \\ x_{\mathscr{B}} \geq 0, \quad x_{\mathscr{N}} \geq 0. \end{cases}\end{gathered} \tag{39}$$

Заметим, что те же условия можно получить другим способом, выражая в (34) базисные переменные $x_{\mathscr{B}}$ через небазисные:

$$x_{\mathscr{B}} = B^{-1} b - B^{-1} N x_{\mathscr{N}}$$

и подставляя их в выражение целевой функции.

Замечание 2.32. Формула $\widehat{c} = c - uA$ из (38) показывает, что для того, чтобы вычислить текущие относительные оценки (нулевую строку симплекс-таблицы) необдимо из строки c вычесть все строки матрицы A, домноженные на соответствующие цены u.

Замечание 2.33. Решение $\widetilde{x}$ системы $Ax = b$ базисное, если $\widetilde{x}_{\mathscr{N}} = 0$ и, следовательно, $\widetilde{x}_{\mathscr{B}} = B^{-1} b$. Базисное решение $\widetilde{x}$ допустимо, если $\widetilde{x} \geq 0$ и, так как $\widetilde{x}_{\mathscr{N}} = 0$, то достаточно потребовать $\widetilde{x}_{\mathscr{B}} \geq 0$. Значение целевой функции cx на базисном решении $\widetilde{x}$ есть $c\widetilde{x} = ub$. Базисное решение оптимально, если $\widehat{c} = c - uA \geq 0$, или $\widehat{c}_{\mathscr{N}} = c_{\mathscr{N}} - uN \geq 0$.

Замечание 2.34. Предположим, что ограничения ЗЛП совместны, но ранг матрицы A меньше числа m ее строк. В этом случае, удалив из системы ограничений избыточные уравнения (например, воспользовавшись методом искусственного базиса), приходим к эквивалентной ЗЛП с матрицей ограничений полного ранга. Для этой ЗЛП, в частности, справедливо утверждение 2.30. Покажем, как нулевую строку этой ЗЛП выразить через элементыв исходной ЗЛП. Пусть $A = (\widetilde{B}, \widetilde{N})$, где $\widetilde{B}$ — подматрица, составленная из столбцов с номерами из $\mathscr{B}$, а $\widetilde{N}$ — подматрица, составленная из столбцов с номерами из $\mathscr{N}$. В качестве вектора цен u возьмем произвольное решение системы $u\widetilde{B} = c_{\mathscr{B}}$. Очевидно, формула $\widehat{c} = c - uA$ останется справедливой.

2.6. Модифицированный симплекс-метод

Сделаем два замечания, касающиеся алгоритма 1:

1) Для выбора номера s направляющего столбца достаточно знать только нулевую строку.

2) Если s найдено, то для выбора номера r направляющей строки достаточно знать только нулевой и s-ый столбцы.

Если m много меньше n, то вместо того, чтобы на каждой итерации пересчитывать всю симплексную таблицу Q, выгоднее использовать следующую процедуру.

1) Вычислить вектор цен u.

2) По формулам (38) вычислить нулевой столбец $\widehat{b}$ и элементы $\widehat{c}_{\mathscr{N}}$ нулевой строки, соответствующие небазисным переменным.

3) Выбрать номер s направляющего столбца.

4) По формулам (38) вычислить направляющий столбец $\widehat{a}$.

5) Выбрать номер r направляющей строки.

6) В $\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$ в качестве j_r взять s и перейти к следующей итерации.

Определение 2.35. Приведенная схема вычислений называется *модифицированным симплекс-методом*.

Для предотвращения зацикливания в модифицированном симплекс-методе удобно применять правило Бленда.

Пример 2.36. Решим ЗЛП

$$\max(-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

модифицированным симплекс-методом.

Для нахождения начальной допустимой базы воспользуемся методом искусственного базиса. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = (0, 0, 0, 0, 1, 1).$$

На *первой итерации* вычисляем:

$$\mathscr{B} = \langle 5, 6 \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{\mathscr{B}} = (1, 1), \quad c_{\mathscr{N}} = (0, 0, 0, 0),$$

$$u = c_{\mathscr{B}} B^{-1} = (1, 1), \quad \widehat{b} = B^{-1} b = (0, 2)^{\top},$$

$$\widehat{c}_{\mathscr{N}} = c_{\mathscr{N}} - uN = (-4, 2, -5, -5), \quad \text{откуда} \quad s = 1,$$

$$\widehat{a} = B^{-1}(a_{1s}, \ldots, a_{ms})^{\top} = (\boxed{3}, 1)^{\top}, \quad \text{откуда} \quad r = 1.$$

На *второй итерации*:

$$\mathscr{B} = \langle 1, 6 \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = (-4/3, 0),$$

$$\widehat{b} = (0, 2)^{\top}, \quad \widehat{c}_{\mathscr{N}} = (-2, 1/3, -7/3, 4/3), \quad \text{откуда} \quad s = 1,$$

$$\widehat{a} = (-1, \boxed{2})^{\top}, \quad \text{откуда} \quad r = 2.$$

На *третьей итерации*:

$$\mathscr{B} = \langle 1, 2 \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = (-1, -1), \quad \widehat{c}_{\mathscr{N}} = (0, 0, 0, 0, 1, 1).$$

Нулевая строка симплексной таблицы неотрицательна. Первый этап симплекс-метода завершен. Найдена допустимая база $\mathscr{B} = \langle 1, 2 \rangle$.

На втором этапе имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = (1, -2, -1, -1).$$

На *первой итерации* второго этапа:

$$\mathscr{B} = \langle 1, 2 \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = ({}^1\!/_2, -{}^1\!/_2),$$

$$\widehat{b} = (1, 1)^\top, \quad \widehat{c}_{\mathscr{N}} = (0, 0, -{}^5\!/_2, -{}^1\!/_2), \quad \text{откуда} \quad s = 3,$$

$$\widehat{a} = (\boxed{{}^7\!/_6}, -{}^1\!/_6)^\top, \quad \text{откуда} \quad r = 1.$$

На *второй итерации*:

$$\mathscr{B} = \langle 3, 2 \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = ({}^1\!/_7, -{}^{11}\!/_7),$$

$$\widehat{b} = ({}^6\!/_7, {}^8\!/_7)^\top, \quad \widehat{c}_{\mathscr{N}} = ({}^{15}\!/_7, 0, 0, {}^{24}\!/_7)$$

Нулевая строка симплексной таблицы неотрицательна. Найдено оптимальное решение $\widehat{x} = (0, {}^8\!/_7, {}^6\!/_7, 0)^\top$. Значение целевой функции $\widehat{x}_0 = ub = -{}^{22}\!/_7$.

В разобранном примере мы явно вычисляли все элементы матрицы B^{-1}. Заметим, однако, что этого можно было избежать. Действительно, из (38) следует, что вектор цен, нулевой и s-ый столбцы можно находить, решая следующие системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &uB = c_{\mathscr{B}}, \\ &B\widehat{b} = b, \\ &B\widehat{a} = (a_{1s}, \ldots, a_{ms})^\top. \end{aligned}$$

Опишем другой способ избежать явного вычисления матрицы B^{-1}. Пусть F — матрица, полученная из матрицы E_i в произведении (36) вычеркиванием нулевой строки и нулевого столбца (строки и столбцы в E_i нумеруются с нуля). Тогда $B^{-1} = F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1$ и поэтому

$$u = c_{\mathscr{B}} \cdot F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \widehat{b} &= F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1 \cdot b, \\ \widehat{a} &= F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1 \cdot (a_{1s}, \ldots, a_{ms})^\top. \end{aligned} \tag{41}$$

Умножение в (40) следует выполнять слева направо, а в (41) — справа налево. Матрицы F_i вычисляются на каждой итерации. Так как они имеют специальный вид, то для их представления используют специальную форму хранения.

Такой способ весьма удобен особенно в том случае, когда матрица ограничений A *разрежена*, т. е. содержит много нулевых элементов. В этом случае используют специальное представление матрицы A, сохраняя в памяти компьютера только ненулевые элементы с указанием их позиции.

В литературе рассматриваются и другие варианты модифицированного симплекс-метода.

2.7. Столбцовая форма симплекс-метода

Пример 2.37. Рассмотрим задачу

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad = 6, \\ \ \ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 6, \\ \ \ x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

В качестве начальной допустимой базы возьмем $\mathscr{B}^{(0)} = \langle 3, 4 \rangle$. Выразим каждую переменную через небазисные:

$$\begin{cases} x_0 = \quad - \ (-x_1) - \ (-x_2), \\ x_1 = \quad - \ (-x_1), \\ x_2 = \qquad\qquad\quad - \ (-x_2), \\ x_3 = 6 + 2(-x_1) + \ (-x_2), \\ x_4 = 6 + \ (-x_1) + 2(-x_2), \end{cases} \tag{42}$$

Рассмотрим соседнюю базу $\mathscr{B}^{(1)} = \langle 1, 4 \rangle$. Чтобы теперь выразить все переменные через небазисные, в (42) в формуле для x_3 выразим x_1 и подставим полученное выражение во все остальные равенства. После приведения подобных, получим:

$$
\begin{cases}
x_0 = 3 + {}^1\!/_2(-x_3) - {}^1\!/_2(-x_2),\\
x_1 = 3 + {}^1\!/_2(-x_3) \quad {}^1\!/_2(-x_2),\\
x_2 = \qquad\qquad\quad - \quad (-x_2),\\
x_3 = \quad - \quad (-x_3),\\
x_4 = 3 - {}^1\!/_2(-x_3) + {}^3\!/_2(-x_2),
\end{cases}
\tag{43}
$$

Все коэффициенты формул (42) и (43) соберем в таблицы:

$$
T^{(0)} = \left(\begin{array}{c|cc}
0 & -1 & -1\\
\hline
0 & -1 & 0\\
0 & 0 & -1\\
6 & \boxed{2} & 1\\
6 & 1 & 2
\end{array}\right), \qquad
T^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc}
3 & {}^1\!/_2 & -{}^1\!/_2\\
\hline
3 & {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2\\
0 & 0 & -1\\
0 & -1 & 0\\
3 & -{}^1\!/_2 & {}^3\!/_2
\end{array}\right).
$$

В матричном виде равенства (42) и (43) можно записать следующим образом: $(x_0, x)^\top = T^{(0)} \cdot (1, -x_1, -x_2)^\top$, $(x_0, x)^\top = T^{(1)} \cdot (1, -x_3, -x_2)^\top$ соответственно.

Заметим, что переход от $T^{(0)}$ к $T^{(1)}$ можно получить с помощью шага столбцовых преобразований с элементом, обведенным в рамку: первый столбец[10] разделим на -2 и прибавим полученный столбец ко второму, а затем, умноженный на 6, — к нулевому.

Рассмотрим ЗЛП в каноническом виде:

$$\max cx$$

$$
\begin{cases}
Ax = b,\\
x \geq 0.
\end{cases}
$$

Пусть $\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$ — некоторая база, а $\mathscr{N} = \langle k_1, k_2, \ldots, k_{n-m} \rangle$ — некоторая перестановка номеров небазисных столбцов. Выразим все переменные через небазисные:

$$
x_i = t_{i0} + \sum_{j=1}^{n-m} t_{ij}(-x_{k_j}) \quad (i = 0, 1, \ldots, n).
\tag{44}
$$

[10]Нумерация строк и столбцов в матрицах $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ начинается с нуля.

Определение 2.38. Матрица $T = (t_{ij})$ $(i = 0, \dots, n;\ j = 0, \dots, n - m)$ называется *столбцовой симплекс-таблицей*, соответствующей перестановке $\mathscr{N}$.

Замечание 2.39. Пусть $Q = (q_{ij})$ — (строчечная) симплекс-таблица, соответствующая базе $\mathscr{B}$. Этой симплекс-таблице соответствует упрощенная система уравнений (25), (26). Легко видеть, что связь элементов t_{ij} и q_{ij} определяется формулами:

$$t_{kj} = \begin{cases} q_{ik_j} & \text{при} \quad k = 0 \text{ или } k = j_i \in \mathscr{B}, \\ -1 & \text{при} \quad k = k_j \in \mathscr{N}, \\ 0 & \text{при} \quad k \in \mathscr{N}, \quad j = 0 \text{ или } k \neq k_j. \end{cases}$$

В частности, компоненты текущего базисного решения записаны в нулевом столбце таблицы T, а коэффициенты целевой функции, соответствующие небазисным переменным, — в нулевой строке. Значение целевой функции на текущем базисном решении равно t_{00}.

Определение 2.40. Столбцовая симплекс-таблица $T = (t_{ij})$ называется (*прямо*) *допустимой*, если $t_{i0} \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Найдем закон изменения коэффициентов t_{ij} при переходе от текущей базы к соседней. Пусть нужно ввести в базу $k_s \in \mathscr{N}$ и вывести из базы $r \notin \mathscr{N}$.

Рассмотрим (44) для $i = r$. Выражая x_{k_s}, получим:

$$x_{k_s} = \frac{t_{r0}}{t_{rs}} + \sum_{j \neq s} \frac{t_{rj}}{t_{rs}}(-x_{k_j}) + \frac{1}{t_{rs}}(-x_r).$$

Подставим x_{k_s} в оставшиеся уравнения (44):

$$\begin{aligned} x_i &= t_{i0} + \sum_{j \neq s} t_{ij}(-x_{kj}) + t_{is} \cdot \left(-\frac{t_{r0}}{t_{rs}} - \sum_{j \neq s} \frac{t_{rj}}{t_{rs}}(-x_{k_j}) - \frac{(-x_r)}{t_{rs}} \right) \\ &= \left(t_{i0} - t_{is}\frac{t_{r0}}{t_{rs}} \right) + \sum_{j \neq s} \left(t_{ij} - \frac{t_{is}t_{rj}}{t_{rs}} \right)(-x_{k_j}) - \frac{t_{is}}{t_{rs}}(-x_r). \\ &\qquad (i = 0, 1, \dots, r - 1, r + 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Пусть

$$t'_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{t_{is}}{t_{rs}} & \text{при} \quad j = s, \\ t_{ij} - \dfrac{t_{is}t_{rj}}{t_{rs}} & \text{при} \quad j = 0, \dots, s - 1, s + 1, \dots, n - m. \end{cases}$$

Мы видим, что при переходе от текущей базы к соседней столбцы таблицы T пересчитываются по следующим правилам: s-ый столбец делится на $-t_{rs}$, а из остальных столбцов вычитается r-ый, умноженный на такой коэффициент, чтобы в r-ой строке получились нули.

Дадим пошаговое описание столбцовой формы прямого симплекс-метода.

Алгоритм 2. [Прямой симплекс-метод в столбцовой форме.]

Шаг 0. Начать с допустимой базы $\mathscr{B}$. Пусть $\mathscr{N} = \langle k_1, \ldots, k_{n-m} \rangle$ — некоторая перестановка номеров небазисных переменных, а T — соответствующая столбцовая симплекс-таблица.

Шаг 1. Если $t_{0j} \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n - m)$, конец. Текущее базисное решение оптимально. Иначе выбрать такое s, что $t_{0s} < 0$.

Шаг 2. Если $t_{is} \leq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, конец. Значение целевой функции не ограничено. Иначе выбрать такое r, что

$$\frac{t_{r0}}{t_{rs}} = \min \left\{ \frac{t_{i0}}{t_{is}} : \quad t_{is} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \right\}.$$

Шаг 3. (Шаг гауссова преобразования.) Поделить s-ый столбец матрицы Q на $-t_{rs}$. Для каждого $j \in \{0, 1, \ldots, n - m\} \setminus \{s\}$ вычесть из j-го столбца s-ый, умноженный на t_{rj}.

Шаг 4. В $\mathscr{N} = \langle k_1, \ldots, k_{n-m} \rangle$ в качестве k_s взять r. Вернуться на шаг 1.

Определение 2.41. Столбец s, строка r и элемент t_{rs} в алгоритме 2 называются *направляющими*.

Пример 2.42. Решим столбцовым симплекс-методом задачу из примера 2.37. Таблицы $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ уже получены. В таблице $T^{(1)}$ номера направляющего столбца и направляющей строки: $s = 2$, $r = 4$. Получаем:

$$T^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1/2 & -1/2 \\ \hline 3 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1/2 & \boxed{3/2} \end{array} \right), \qquad T^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cc} 4 & 1/3 & 1/3 \\ \hline 2 & 2/3 & -1/3 \\ 2 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Перестановки номеров небазисных переменных следующие: $\mathscr{N}^{(0)} = \langle 1, 2\rangle$, $\mathscr{N}^{(1)} = \langle 3, 2\rangle$, $\mathscr{N}^{(2)} = \langle 3, 4\rangle$, Таблица $T^{(2)}$ оптимальна. Оптимальный вектор: $\widehat{x} = (2, 2, 0, 0)^{\top}$. Значение целевой функции равно $\widehat{x}_0 = 4$.

Правило Бленда, заключающееся в использовании критериев, сформулированных в замечании 2.25, очевидно, предотвращает от зацикливания и в столбцовом симплекс-методе. Легко видеть, что в этой форме симплекс-метода оно заключается в выборе такого s, для которого $t_{0s} < 0$ и k_s минимально, и в выборе такого r, на котором достигается минимум

$$\min\left\{\frac{t_{i0}}{t_{is}}: \quad t_{is} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\right\}.$$

и r минимально.

Обратимся к вопросу, когда выгоднее применять симплекс-метод в столбцовой форме, а когда в строчечной. Для представления строчечной симплекс-таблицы необходимо хранить (и, следовательно, на каждой итерации пересчитывать) $(m+1)(n+1)$ элементов, а для представления столбцовой симплекс-таблицы необходимо хранить $(n+1)(n-m+1)$ элементов. Сравнивая эти величины, получаем, что если $2m < n$, то выгоднее применять строчечный симплекс-метод, а если $2m > n$ — столбцовый.

2.8. Замечания о сложности решения ЗЛП

Симплекс-метод широко используется и хорошо работает на практике: многочисленные эксперименты подтверждают почти линейную по числу переменных оценку числа итераций. Однако можно показать, что на специальных примерах симплекс-метод (при некотором правиле выбора направляющего столбца и направляющей строки) работает экспоненциально долго. Первыми такой пример предложили Кли[11] и Минти[12] в 1972 г.

[11] Виктор Кли (род.İ925) — американский математик.

[12] Джордж Джеймс Минти (1928–1984) — американский математик.

Кли и Минти рассмотрели задачу

$$\max(2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + 2x_{n-1} + x_n)$$

$$\left\{\begin{array}{llllr} x_1 & & & & \le \quad 5, \\ 4x_1 + & x_2 & & & \le \ 25, \\ 8x_1 + & 4x_2 + & x_3 & & \le 125, \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 2^n x_1 + & 2^{n-1}x_2 + & 2^{n-2}x_3 + \ldots + & 4x_{n-1} + x_n & \le \ 5^n, \end{array}\right. \tag{45}$$

которую можно привести к каноническому виду путем добавления к левой части каждого уравнения переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно. Если в качестве начальной базы выбрать столбцы, соответствующие этим новым переменным, то симплекс-метод с правилом выбора направляющего столбца α_2 (см. стр. 39) и произвольным выбором направляющей строки[13] выполнит $2^n - 1$ итераций. Примеры ЗЛП, на которых симплекс-метод тратит экспоненциальное число итераций, предложены и для других правил выбора направляющей строки и направляющего столбца, в том числе для правила Бленда. Эти примеры, как и (45), получены в результате деформации *n-мерного куба* (*гиперкуба*) $0 \le x_j \le 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, заставляющей симплекс-метод проглядеть «глобально хорошие» пути. Тем не менее, вопрос о существовании правила, делающего симплекс-метод полиномиальным, остается открытым.

Упражнение 2.43. Показать, что симплекс-метод с правилом выбора направляющего столбца α_2 при $n = 3$ решает задачу (45) за 7 итераций.

Покажите, что для любого n симплекс-метод с правилом выбора направляющего столбца α_3 решает задачу (45) за одну итерацию.

С другой стороны, алгоритмы, решающие ЗЛП за полиномиальное время существуют и, следовательно, ЗЛП принадлежит классу P. Вопрос о существовании полиномиального алгоритма для задачи линейного программирования был решен в 1979 г. Л. Г. Хачияном[14]. Для решения ЗЛП он использовал *метод эллипсоидов*, разработанный для задач нелиней-

---

[13]Так как задача (45) невырождена, то номер направляющей строки определяется однозначно.

[14]Леонид Генрихович Хачиян — российский математик; премия Фалкерсона, 1982, совместно с Д. Б. Юдиным и А. С. Немировским.

ного программирования Н. З. Шором[15], Д. Б. Юдиным[16] и А. С. Немировским[17].

Кратко остановимся на алгоритме Хачияна. Пусть D — положительно определённая симметричная матрица и z — точка в $\mathbf{R}^n$. Тогда множество $E = M(z, D) = \{x : (x - z)^\top D(x - z) \le 1\}$ задаёт *эллипсоид* с центром в точке z.

Пусть полиэдр P содержится в E. Покажем, как можно решить задачу об установлении непустоты полиэра P и, в случае $P \neq \emptyset$, нахождении точки, принадлежащей P. Если z не удовлетворяет какому-то из линейных неравенств $ax \le \alpha$, описывающих P, то $P \subseteq E'$, где E' — эллипсоид минимального объёма, содержащий $\{x : ax \le az\} \cup E$. Для E' центр z' и положительно определённая матрица D' находятся достаточно просто, и процедуру можно повторять до тех пор, пока центр очередного эллипсоида не будет пренадлежать P. Существенными моментами в алгоритме являются следующие:

1) отношение объёмов E' и E меньше величины $e^{-\frac{1}{2}(n+1)}$,

2) есть величина ν, полиномиально зависящая от длины входной информации, показывающая, что если объём очередного эллипсоида стал меньше ν, то $P = \emptyset$ или его размерность меньше n.

Хачияну на пути к его результату пришлось преодолеть ещё ряд препятствий, главное из которых, по-видимому, состояло в необходимости рациональной аппроксимации полиэдра E', сохраняющей свойства 1) и 2). Другие проблемы (переход к оптимизации, неограниченные области, полиэдры не полной размерности и пр.) не столь принципиальны. Можно показать, что если элементы (m, n)-матрицы A и компоненты столбца b — целые числа, не превосходящие по модулю α, то для нахождения рационального решения (или доказательства его отсутсвия) системы $Ax \le b$ алгоритмом Хачияна достаточно выполнить $O(mn^8 \log^2(\alpha n))$ арифметических (битовых) операций. Таким образом, задачу определения совместности системы линейных неравенств можно решить за полиномиальное время. Доказано, что эта задача полиномиально эквивалентна задаче линейного программирования.

[15] Наум Зуселевич Шор (род. 1937) — украинский математик

[16] Д. Б. Юдин — российский математик.

[17] Аркадий Семенович Немировский (род. 1947) — российский математик

Хотя алгоритм Хачияна и его модификации эффективны с теоретической точки зрения, практически конкурировать с симплекс-методом они, по крайней мере, пока, не могут. Объяснением этому, по-видимому, служат результаты о сложности симплекс-метода в среднем. Показано, что в среднем (в разных вероятностных моделях) симплекс-метод полиномиален, причем оценки сложности существенно лучше оценок алгоритма Хачияна. В частности, для специального варианта симплекс-метода доказано, что среднее число итераций на задаче (9) не превосходит

$$\min\left\{\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}(m+1),\ \frac{1}{8}(m+n+1)\right\}.$$

Насколько эти вероятностные модели естественны предстоит ещё выяснить.

2.9. Задачи

2.1. Показать, что если система векторов, соответствующих положительным компонентам допустимого решения, линейно зависима, то существует допустимое решение с меньшим числом положительных компонент.

2.2. Решить ЗЛП:

$$\max(-x_1 + 2x_2 + 4x_3) \qquad\qquad \max(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0; \end{cases}$$

$$\max(x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, \quad (j = 1, \ldots, 6); \end{cases}$$

$$\max(-5x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 2, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 - x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, \quad (j = 1, \ldots, 6); \end{cases}$$

$$\max(-x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4)$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.3. Рассмотреть ЗЛП

$$\min(6x_1 - {}^3\!/_4\, x_5 + 150x_6 - {}^1\!/_{50})$$

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + {}^1\!/_4\, x_5 - 60x_6 - {}^1\!/_{25}\, x_7 = 0, \\ 3x_1 + x_3 + {}^1\!/_2\, x_5 - 90x_6 - {}^1\!/_{50}\, x_7 = 0, \\ x_4 + x_7 = 1. \end{cases}$$

Проверить, что симплекс-метод с критериями выбора направляющего столбца α_1 и α_2 и критерием выбора направляющей строки β_1 (см. стр. 39) приводит на этой задаче к зацикливанию, а критерий α_3 вместе с критерием β_1 — нет.

2.4. Привести к каноническому виду и найти начальный опорный план в ЗЛП с ограничениями $Ax \leq b$, $x \geq 0$, где $b \geq 0$.

2.5. Пусть столбцы $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ матрицы A линейно независимы. Показать, что для нахождения начальной допустимой базы в (24) достаточно не более одной искусственной переменной. Указание: ввести вектор $a_{n+1} = -a_{j_1} - \ldots - a_{j_m}$.

2.6. Показать, что для нахождения начальной допустимой базы в ЗЛП с ограничениями $Ax \leq b$, $x \geq 0$, где $b \geq 0$, достаточно не более одной искусственной переменной. Указание: ввести вектор $a_{n+1} = -a_{j_1} - \ldots - a_{j_m}$.

Глава 3

Двойственность в линейном программировании

3.1. Двойственная задача

Основная идея двойственности состоит в совместном изучении пары ЗЛП: исходной и так называемой двойственной к ней.

Пусть

$$\begin{array}{ll} M_1 = \{1, \ldots, m_1\}\,, & M_2 = \{m_1 + 1, \ldots, m\}\,, \\ N_1 = \{1, \ldots, n_1\}\,, & N_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n\}\,. \end{array}$$

Рассмотрим две задачи линейного программирования:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i \in M_1) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i & (i \in M_2) \\ x_j \geq 0 & (j \in N_1) \\ x_j \text{ — любые} & (j \in N_2) \end{array}\right. \tag{46}$$

и

$$\min(u_1b_1 + u_2b_2 + \ldots + u_mb_m)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u_i \text{ — любые} & (i \in M_1) \\ u_i \geq 0 & (i \in M_2) \\ u_1a_{1j} + u_2a_{2j} + \ldots + u_ma_{mj} \geq c_j & (j \in N_1) \\ u_1a_{1j} + u_2a_{2j} + \ldots + u_ma_{mj} = c_j & (j \in N_2) \end{array}\right. \tag{47}$$

Заметим, что каждому $j \in N_1 \cup N_2$ соответствуют переменная x_j в ЗЛП (46) и некоторое ограничение в виде уравнения или неравенства в ЗЛП (47). Будем говорить, что эти переменная и ограничение *соответствуют друг другу*. С другой стороны, каждому $i \in M_1 \cup M_2$ соответствуют переменная u_i в ЗЛП (47) и некоторое ограничение в виде уравнения или неравенства в ЗЛП (46). Также будем говорить, что эти переменная и ограничение соответствуют друг другу.

Определение 3.1. Задача (47) называется *двойственной* к задаче (46), при этом задача (46) называется *прямой* задачей. И, наоборот, задача (46) называется *двойственной* к задаче (47), при этом задача (47) называется *прямой* задачей.

Запишем задачи (46), (47) в матричной форме. Для этого введем в векторы-столбцы

$$\begin{array}{ll} x^{(1)} = (x_1, \ldots, x_{n_1})^\top, & x^{(2)} = (x_{n_1+1}, \ldots, x_n)^\top, \\ b^{(1)} = (b_1, \ldots, b_{m_1})^\top, & b^{(2)} = (b_{m_1+1}, \ldots, b_m)^\top, \end{array}$$

векторы-строки

$$\begin{array}{ll} u^{(1)} = (u_1, \ldots, u_{m_1}), & u^{(2)} = (u_{m_1+1}, \ldots, u_m), \\ c^{(1)} = (c_1, \ldots, c_{n_1}), & c^{(2)} = (c_{n_1+1}, \ldots, c_n) \end{array}$$

и матрицы $A_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, 2$; $\nu = 1, 2$), составленные из элементов a_{ij}, где $i \in M_\mu$, $j \in N_\nu$. Теперь задачи (46), (47) можно записать в виде:

$$\max(c^{(1)}x^{(1)} + c^{(2)}x^{(2)}) \qquad\qquad \min(u^{(1)}b^{(1)} + u^{(2)}b^{(2)})$$

$$\begin{cases} A_{11}x^{(1)} + A_{12}x^{(2)} = b^{(1)}, \\ A_{21}x^{(1)} + A_{22}x^{(2)} \le b^{(2)}, \\ x^{(1)} \ge 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u^{(1)}A_{11} + u^{(2)}A_{21} \ge c^{(1)}, \\ u^{(1)}A_{12} + u^{(2)}A_{22} = c^{(2)}, \\ u^{(2)} \ge 0. \end{cases}$$

В силу приведенного определения, двойственной к канонической ЗЛП

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{48}$$

является ЗЛП

$$\min(u_1b_1 + u_2b_2 + \ldots + u_mb_m)$$

$$\begin{cases} u_1a_{11} + u_2a_{21} + \ldots + u_ma_{m1} \geq c_1, \\ u_1a_{12} + u_2a_{22} + \ldots + u_ma_{m2} \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1a_{1n} + u_2a_{2n} + \ldots + u_ma_{mn} \geq c_n. \end{cases} \tag{49}$$

Обратим внимание на то, что переменная u_i двойственной задачи не ограничена по знаку. В матричной форме записи задачи (48), (49) имеют вид соответственно:

$$\max cx \qquad \qquad \min ub,$$

$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad uA \geq c,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^\top$ — столбец переменных прямой задачи, $u = (u_1, u_2, \ldots u_m)$ — строка двойственных переменных.

Двойственной к ЗЛП в нормальной форме

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{50}$$

является ЗЛП

$$\min(u_1b_1 + u_2b_2 + \ldots + u_mb_m)$$

$$\begin{cases} u_1a_{11} + u_2a_{21} + \ldots + u_ma_{m1} \geq c_1, \\ u_1a_{12} + u_2a_{22} + \ldots + u_ma_{m2} \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1a_{1n} + u_2a_{2n} + \ldots + u_ma_{mn} \geq c_n, \\ u_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{51}$$

Определение 3.2. Пара задач (50), (51) называется парой двойственных задач *в симметричной форме*.

В матричной форме ЗЛП (50), (51) принимают соответственно вид:

$$\max cx \qquad\qquad \min ub,$$

$$\begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} uA \ge c, \\ u \ge 0. \end{cases}$$

Основные результаты теории двойственности мы докажем для пары двойственных задач (48), (49), хотя из дальнейшего будет ясно, что эти результаты переносятся и на задачи (46), (47).

3.2. Теорема двойственности

Лемма 3.3. *Пусть* $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)^\top$ *— допустимый вектор ЗЛП* (48)*, а* $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_m)$ *— допустимый вектор ЗЛП* (49)*, тогда*

$$c_1\widetilde{x}_1 + c_2\widetilde{x}_2 + \ldots + c_n\widetilde{x}_n \le \widetilde{u}_1 b_1 + \widetilde{u}_2 b_2 + \ldots + \widetilde{u}_m b_m, \quad \textit{или} \quad c\widetilde{x} \le \widetilde{u}b.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{cases} A\widetilde{x} = b, \\ \widetilde{x} \ge 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \widetilde{u}A \ge c. \tag{52}$$

Так как $\widetilde{x} \ge 0$, то из $\widetilde{u}A \ge c$ следует $\widetilde{u}A\widetilde{x} \ge c\widetilde{x}$, откуда, ввиду $A\widetilde{x} = b$, получаем $\widetilde{u}b \ge c\widetilde{x}$. ∎

Следствие 3.4. *Пусть* $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ *— допустимые решения прямой ЗЛП* (48) *и двойственной ЗЛП* (49) *соответственно, причем значения целевых функций на них совпадают, т. е.* $c\widetilde{u} = \widetilde{u}b$. *Тогда* $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ *— оптимальные решения задач* (48) *и* (49) *соответственно.*

Следствие 3.5. *Если множество* M *допустимых решений прямой ЗЛП* (49) *не пусто, и целевая функция* cx *не ограничена сверху на* M, *то множество* N *допустимых решений двойственной ЗЛП* (49) *пусто.*

Следствие 3.6. *Если множество* N *допустимых решений двойственной ЗЛП* (49) *не пусто, и целевая функция* ub *не ограничена снизу на* N, *то множество* N *допустимых решений прямой ЗЛП* (48) *пусто.*

Теорема 3.7. *Если прямая ЗЛП* (48) *имеет оптимальный вектор, то двойственная к ней ЗЛП* (49) *также имеет оптимальный вектор и значения целевых функций на них совпадают.*

Доказательство. Применим к ЗЛП (48) какой-либо вариант симплекс-метода, гарантирующий от зацикливания. Через конечное число шагов получаем оптимальную базу $\mathscr{B}$ и оптимальный вектор $\widetilde{x}$. Пусть

$$A = (B, N), \quad c = (c_{\mathscr{B}}, c_{\mathscr{N}}),$$

где B — базисная подматрица матрицы A, соответствующая базе $\mathscr{B}$, и $c_{\mathscr{B}}$, $c_{\mathscr{N}}$ — векторы, составленные из базисных и небазисных компонент вектора c соответственно. Рассмотрим вектор цен $\widetilde{u} = c_{\mathscr{B}}B^{-1}$, соответствующий базе $\mathscr{B}$. Из результатов раздела 2.5 (см. утверждение 2.30) следует, что $c\widetilde{x} = \widetilde{u}b$. Так как $\widetilde{x}$ — оптимальное базисное решение, то из замечания 2.31 следует, что $c - \widetilde{u}A \geq 0$.

Итак, вектор цен $\widetilde{u}$, соответствующий оптимальной базе $\mathscr{B}$, удовлетворяет условиям двойственной задачи (49), причем значения целевых функций прямой и двойственной задач на векторах $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$ совпадают. Воспользовавшись следствием 3.4, получаем требуемое. ∎

Замечание 3.8. Предложенное доказательство дает способ построения оптимального решения $\widetilde{u}$ двойственной ЗЛП по предварительно найденной оптимальной базе $\mathscr{B}$ прямой ЗЛП.

Пример 3.9. Составим и решим задачу, двойственную к ЗЛП из примера 2.13 на с. 37.

По определению двойственная ЗЛП имеет следующий вид:

$$\min(6u_1 + 6u_2)$$

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 \geq 0, \\ u_1 + 2u_2 \geq 2, \\ u_1 \geq -1, \\ u_2 \geq 1. \end{cases} \tag{53}$$

Так как оптимальный вектор $\widetilde{x} = (2, 2, 0, 0)^{\top}$ прямой ЗЛП соответствует базе $\mathscr{B} = \langle 1, 2 \rangle$, то $\widetilde{u}$ можно получить, решив систему, полученную обращением в равенства первого и второго неравенств в (53):

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = 1, \\ u_1 + 2u_2 = 1. \end{cases}$$

Получаем $\widetilde{u} = (1/3, 1/3)$. Подставив компоненты решения в целевую функцию, проверим, что оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задачи ($\widetilde{u}_0 = 4$) совпадают.

Упражнение 3.10. Предположим, что целевая функция cx не ограничена на множестве допустимых решений прямой ЗЛП (48). Тогда по следствию 3.5 условия двойственной ЗЛП несовместны. Покажите, как метод, описанный в доказательстве теоремы 3.7, позволяет найти неравенство двойственной ЗЛП, противоречащее некоторой неотрицательной линейной комбинации остальных неравенств.

Замечание 3.11. Как показывает следующий пример, из несовместности условий прямой ЗЛП не следует неограниченность линейной формы в двойственной ЗЛП, более того, не следует даже совместность условий двойственной ЗЛП.

Пример 3.12. Рассмотрим пару двойственных задач:

$$\begin{array}{cc}
\max x_1 & \min(u_1 - u_2) \\[2mm]
\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1, \\ x_3 = -1, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{r} u_1 \geq 1, \\ -u_1 \geq 0, \\ u_2 \geq 0. \end{array}\right.
\end{array}$$

Очевидно, что задачи не имеют допустимых решений.

Теорема 3.13. *Если ЗЛП* (49) *имеет оптимальное решение, то ЗЛП* (48) *также имеет оптимальное решение и значения целевых функций на них совпадают.*

Доказательство. Для доказательства приведем двойственную ЗЛП (49) к каноническому виду. Согласно разделу 1.3 будем иметь:

$$\begin{array}{c} \min ub \\[2mm] uA \geq c \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \max u(-b) \\[2mm] \left\{\begin{array}{l} uA - y = c, \\ y \geq 0 \end{array}\right. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \max(v - w)(-b) \\[2mm] \left\{\begin{array}{l} (v - w)A - y = c, \\ v, w, y \geq 0 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \max\, (v, w, y) \cdot (-b, b, 0)^\top \\[2mm] \left\{\begin{array}{l} (v, w, y) \cdot \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -E \end{pmatrix} = c, \\ v, w, y \geq 0. \end{array}\right. \end{array} \tag{54}$$

Задача, двойственная к (54), имеет вид:

$$\min ct$$
$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -E \end{pmatrix} \cdot t \geq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Обозначая $x = -t$, получаем ЗЛП

$$\max cx$$
$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

которая совпала с (48).

Так как ЗЛП (49) имеет оптимальное решение $\widetilde{u}$, то ЗЛП (54) также имеет оптимальное решение, скажем $(\widetilde{v}, \widetilde{w}, \widetilde{y})$. Применим к ЗЛП (54) теорему 3.7. Так как $(\widetilde{v}, \widetilde{w}, \widetilde{y})$ — ее оптимальное решение, то оптимальное решение $\widetilde{t}$ двойственной задачи (55) существует, причем

$$\widetilde{u}b = -(\widetilde{v}, \widetilde{w}, \widetilde{y}) \cdot (-b, b, 0)^{\top} = -c\widetilde{t} = c\widetilde{x},$$

где $\widetilde{x} = -\widetilde{t}$. Итак, $\widetilde{x}$ — допустимое решение ЗЛП (48), причем $\widetilde{u}b = c\widetilde{x}$. По следствию 3.4 получаем, что $\widetilde{x}$ — оптимальное решение ЗЛП (48). ∎

Пример 3.14. Рассмотрим пару двойственных задач:

$$\max(x_1 + x_2) \qquad\qquad \min(u_1 + u_2)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2u_1 + 3u_2 \geq 1, \\ u_1 + 2u_2 \geq 1. \end{cases}$$

Так как прямая задача не имеет допустимых векторов (единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ее системы уравнений не удовлетворяет условиям неотрицательности), а двойственная имеет (например, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$), то из теоремы 3.13 следует, что значение линейной функции на множестве допустимых решений двойственной задачи не ограничено.

Полученные результаты о паре двойственных ЗЛП (48) и (49) можно переформулировать в виде следующей теоремы, принадлежащей фон Нейману, Гейлу[1], Куну[2] и Таккеру[3].

Теорема 3.15 (Теорема двойственности). *Пусть дана пара двойственных ЗЛП* (48) *и* (49) *тогда справедливо одно и только одно из следующих утверждений:*

а) *обе задачи имеют оптимальные решения с равными значениями целевых функций на них;*

б) *одна из задач имеет допустимые решения, но не имеет оптимального решения (целевая функция не ограничена на множестве решений), а условия другой задачи не совместны;*

в) *условия обеих задач не совместны.*

Упражнение 3.16. Сформулируйте и докажите теорему двойственности для пары двойственных задач в симметричной форме (50) и (51) и пары двойственных задач в общей форме (46) и (47).

3.3. Лемма Фаркаша и ее варианты

Докажем важный результат теории систем линейных неравенств.

Теорема 3.17 (Лемма Фаркаша[4]). *Для того, чтобы неравенство* $ub \geq 0$ *было следствием системы* $uA \geq 0$*, необходимо и достаточно, чтобы система* $Ax = b$ *имела решение* $x \geq 0$*.*

Доказательство.
Достаточность. Пусть x — неотрицательное решение системы $Ax = b$. Домножая систему $uA \geq 0$ справа на x, получим неравенство $ub \geq 0$,
Необходимость. Рассмотрим пару двойственных задач

$$\max 0x \qquad \qquad \min ub$$
$$\begin{cases} Ax = b. \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad uA \geq 0.$$

[1]Дэвид Гейл (род. 1922) — американский математик.
[2]Гарольд Вилльям Кун (род. 1925) — американский математик.
[3]Альберт Вилльям Таккер (1905–1995) — американский математик.

Пусть первая задача несовместна. Условиям второй задачи удовлетворяет вектор $u = 0$, следовательно, вторая задача совместна. По теореме двойственности получаем, что целевая функция ub второй задачи на множестве допустимых векторов неограничена снизу. Следовательно, найдется допустимое u, для которого ub принимает отрицательные значения. ∎

Замечание 3.18. Лемма Фаркаша описывает неравенства-следствия системы линейных неравенств $uA \geq 0$, или, что то же, $ua_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Домножив j-ое неравенство на неотрицательное число x_j, просуммировав по j и положив $b = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = Ax$, получим неравенство-следствие $ub \geq 0$. Нетривиальная часть леммы состоит в том, что любое неравенство-следствие можно получить таким способом. Можно дать и неоднородный («аффинный») вариант леммы Фаркаша.

Теорема 3.19 (Неоднородный вариант леммы Фаркаша). *Для того, чтобы неравенство $ub \geq \delta$ являлось следствием совместной системы $uA \geq c$ необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор $x \geq 0$, для которого $Ax = b$ и $cx \geq \delta$.*

Доказательство.
Достаточность. Пусть вектор x удовлетворяет условиям $x \geq 0$, $Ax = b$, $cx \geq \delta$. Домножая систему $uA \geq c$ справа на x получим неравенство $ub \geq cx \geq \delta$.
Необходимость. Рассмотрим пару двойственных задач

$$\begin{array}{ccc} \max cx & & \min ub \\ \begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases} & \text{и} & uA \geq c \end{array}$$

Из условий теоремы ограничения второй задачи совместны и целевая функция ограничена снизу (величиной δ). По теореме двойственности получаем, что условия первой задачи совместны, причем $\min ub = \max cx \geq \delta$. В качестве x возьмем оптимальный вектор второй задачи. ∎

Упражнение 3.20. Дайте геометрическую интерпретацию теоремы 3.19.

Справедливы следующие варианты леммы Фаркаша.

Утверждение 3.21.

1) *Для того, чтобы неравенство* $ub \geq 0$ *было следствием системы* $uA \geq 0$, $u \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы система* $Ax \leq b$ *имела решение* $x \geq 0$.

2) *Для того, чтобы неравенство* $ub \geq \delta$ *было следствием совместной системы* $uA \geq c$, $u \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор* $x \geq 0$, *для которого* $Ax \leq b$, $cx \geq \delta$.

Утверждение 3.22.

1) *Для того, чтобы неравенство* $ub \geq 0$ *было следствием системы* $uA = 0$, $u \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы система* $Ax \leq b$ *была совместной.*

2) *Для того, чтобы неравенство* $ub \geq \delta$ *было следствием совместной системы* $uA = c$, $u \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор* x, *такой, что* $Ax \leq b$, $cx \geq \delta$.

Упражнение 3.23. Докажите утверждения 3.21, 3.22.

3.4. Дополняющая нежесткость в линейном программировании

3.4.1. Слабая форма свойства дополняющей нежесткости

Докажем важное свойство оптимальных решений пары двойственных задач, для которых реализуется случай а) теоремы двойственности.

Теорема 3.24 (Дополняющая нежесткость в слабой форме). *Пусть* $\widetilde{x}$ *и* $\widetilde{u}$ *— допустимые векторы ЗЛП* (48) *и* (49) *соответственно. Тогда условие*

$$(\widetilde{u}A - c)\widetilde{x} = 0 \tag{56}$$

является необходимым и достаточным для оптимальности каждого из векторов $\widetilde{x}$ *и* $\widetilde{u}$.

Доказательство. Для допустимых решений $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$ выполняются соотношения $A\widetilde{x} = b$, $\widetilde{x} \geq 0$, $\widetilde{u}A \geq c$, поэтому (ср. (52))

$$(\widetilde{u}A - c)\widetilde{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{u}A\widetilde{x} = c\widetilde{x} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{u}b = c\widetilde{x}.$$

В силу теоремы 3.7 последнее равенство является необходимым и достаточным для оптимальности решений. ∎

Следствие 3.25. *Для оптимальности допустимых решений $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ по крайней мере одно из неравенств*

$$\widetilde{x}_j \geq 0 \quad \text{и} \quad \widetilde{u}_1 a_{1j} + \widetilde{u}_2 a_{2j} + \ldots + \widetilde{u}_m a_{mj} \geq c_j$$

выполнялось как равенство.

Замечание 3.26. Условие (56) может быть использовано для доказательства оптимальности решения и для построения оптимального решения прямой ЗЛП по оптимальному решению двойственной ЗЛП. Например, если оптимальное базисное решение прямой задачи $\widetilde{x}$ не вырождено, т. е. $\widetilde{x}_j > 0$ при $j \in \mathscr{B}$, то из (56) следует, что для оптимального решения $\widetilde{u}$ двойственной задачи должно выполняться равенство $\widetilde{u}B = c_{\mathscr{B}}$, откуда $\widetilde{u} = c_{\mathscr{B}}B^{-1}$. Заметим, что полученное равенство совпадает с формулой для оптимального решения двойственной ЗЛП из доказательства теоремы 3.7. Более того, существование оптимальных решений $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$, для которых $(\widetilde{u}A - c)\widetilde{x} = 0$, следует также из теоремы 3.7.

Пример 3.27. Докажем, что вектор $\widetilde{u} = (7, 0, 1)^\top$ является оптимальным для задачи

$$\min(-3u_1 - 5u_2 + 11u_3)$$

$$\begin{cases} -3u_1 - 6u_2 + 11u_3 \geq -10, \\ -u_1 - 2u_2 + 4u_3 \geq -3, \\ \qquad - u_2 + 2u_3 \geq -1. \end{cases}$$

Эту задачу можно рассматривать как двойственную к задаче

$$\max(-10x_1 - 3x_2 - x_3)$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_4 = -3, \\ -6x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -5, \\ 11x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 11, \\ x_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

Подставим $\widetilde{u}$ в ограничения первой задачи. Неравенства

$$\begin{aligned} -\widetilde{u}_2 + 2\widetilde{u}_3 &\geq -1, \\ \widetilde{u}_1 &\geq 0, \\ \widetilde{u}_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

выполнятся как строгие. Следовательно, компоненты $\widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_4$, $\widetilde{x}_6$ вектора $\widetilde{x}$ должны быть нулевыми. Остальные компоненты $\widetilde{x}$ найдем, подставив $\widetilde{x}$ в ограничения-равенства второй задачи:

$$\begin{cases} -3\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 = -3, \\ -6\widetilde{x}_1 - 2\widetilde{x}_2 + \widetilde{x}_5 = -5, \\ 11\widetilde{x}_1 + 4\widetilde{x}_2 = 11, \end{cases}$$

откуда $\widetilde{x} = (1, 0, 0, 0, 1, 0)^\top$. По теореме 3.24 решения $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$ — оптимальные.

Упражнение 3.28. Сформулируйте и докажите аналог теоремы 3.24 для пары двойственных задач в симметричной форме (50) и (51) и пары двойственных задач в общей форме (46) и (47).

Пусть $\widetilde{x}, \widetilde{u}$ — допустимые решения ЗЛП (48) и (49) соответственно. Из условий $A\widetilde{x} = b$, $\widetilde{x} \geq 0$ следует, что вектор b является неотрицательной линейной комбинацией столбцов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ матрицы A с коэффициентами $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n$. Из следствия 3.25 получаем, что $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ оптимальны тогда и только тогда, когда для тех j, для которых j-ое ограничение ЗЛП (49) выполняется строго (т. е. $\widetilde{u}_j a_j > c_j$) коэффициент $\widetilde{x}_j$ этой линейной комбинации равен нулю. Отсюда получаем следующее.

Следствие 3.29. *Допустимый вектор $\widetilde{u}$ является оптимальным решением ЗЛП* (49) *тогда и только тогда, когда вектор b раскладывается в неотрицательную линейную комбинацию тех столбцов матрицы A, для которых соответствующее ограничение выполняется как равенство.*

Дадим геометрическую интерпретацию этому результату. На рисунке 3.1 изображена часть границы области допустимых значений $uA \geq c$, линия уровня $ub = u_0$ целевой функции ub и векторы $-a_1$, $-a_2$, $-b$. Точка $\widetilde{u}$ соответствует оптимальному решению, причем $\widetilde{u}$ удовлетворяет как равенствам только первому и второму ограничениям. Мы видим, что b раскладывается в неотрицательную линейную комбинацию векторов a_1 и a_2.

Упражнение 3.30. Написать ЗЛП, соответствующую рис. 3.1.

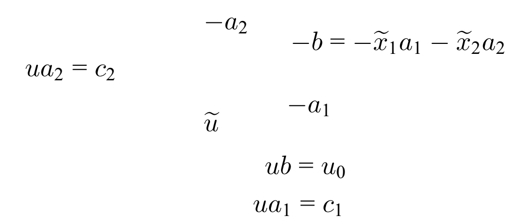

Рис. 3.1.

3.4.2. Сильная форма свойства дополняющей нежесткости

Из свойства дополняющей нежесткости в слабой форме следует, что для любых двух оптимальных решений $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ задач (48), (49) соответственно для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ по крайней мере одно из неравенств

$$\widetilde{x}_j \geq 0 \quad \text{и} \quad \widetilde{u}a_j \geq c_j$$

выполняется как равенство. Свойство дополняющей нежесткости в сильной форме заключается в том, что всегда найдется такая пара оптимальных решений $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$, что для любого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в равенство обращается ровно одно из указанных неравенств. Вначале докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 3.31. *Пусть условия каждой из задач* (48) *и* (49) *совместны. Тогда для каждого* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *существуют оптимальные решения* $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ *этих задач, такие, что*

$$\widetilde{x}_j > 0 \qquad \text{или} \qquad \widetilde{u}a_j > c_j.$$

Доказательство. Пусть $x_0 = u_0$ — значения оптимумов в ЗЛП (48), (49). Рассмотрим пару двойственных задач

$$\begin{gathered}\max x_j \\ \begin{cases} Ax = b, \\ cx \geq x_0, \\ x \geq 0 \end{cases}\end{gathered} \qquad \text{и} \qquad \begin{gathered}\min(ub - \lambda x_0) \\ \begin{cases} uA - \lambda c \geq e_j, \\ \lambda \geq 0, \end{cases}\end{gathered} \tag{57}$$

где x — столбец переменных первой задачи, $(u, \lambda) = (u_1, \ldots, u_n, \lambda)$ — строка переменных второй задачи, а e_j — вектор-столбец, у которого все компоненты, кроме j-ой, равны 0, а j-ая равна 1. Заметим, что допустимое множество первой задачи совпадает с множеством оптимальных векторов ЗЛП (48). По условию леммы это множество непусто.

Предположим, что для всякого оптимального вектора x задачи (48) выполнено равенство $x_j = 0$. Тогда оптимальное значение целевой функции в обеих ЗЛП (57) равно 0. В частности, для оптимального вектора (u, λ) второй задачи справедливо

$$ub - \lambda x_0 = 0, \quad uA - \lambda c \geq e_j, \quad \lambda \geq 0. \tag{58}$$

Возможны два случая:

- Если $\lambda = 0$, то пусть $\widetilde{u} = u + v$, где v — произвольный оптимальный вектор ЗЛП (49). В силу (58)

$$\widetilde{u}A = uA + vA \geq c + e_j, \qquad \widetilde{u}b = ub + vb = 0 + u_0.$$

- Если $\lambda > 0$, то пусть $\widetilde{u} = \dfrac{1}{\lambda}u$. В силу (58)

$$\widetilde{u}A = \frac{1}{\lambda}uA \geq c + \frac{1}{\lambda}e_j, \qquad \widetilde{u}b = \frac{1}{\lambda}ub + vb = x_0 = u_0.$$

Итак, в обоих случаях $\widetilde{u}$ — оптимальное решение ЗЛП (49), причем $\widetilde{u}a_j > c_j$. ∎

Теорема 3.32 (Дополняющая нежесткость в сильной форме). *Пусть условия каждой из задач* (48) *и* (49) *совместны. Тогда существуют* *оптимальные решения $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ этих задач, такие, что для любого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ в равенство обращается ровно одно из пары неравенств:*

$$\widetilde{x}_j \geq 0 \quad \textit{и} \quad \widetilde{u}a_j \geq c_j.$$

Доказательство. По лемме 3.31 для каждого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ существуют оптимальные решения $\widetilde{x}^{(j)}$, $\widetilde{u}^{(j)}$, такие, что

$$\widetilde{x}_j^{(j)} > 0 \qquad \text{или} \qquad \widetilde{u}^{(j)}a_j > c_j.$$

Положим

$$\widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}^{(j)}, \qquad \widetilde{u} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{u}^{(j)}.$$

Очевидно, $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ удовлетворяют условиям теоремы. ∎

Определение 3.33. Ограничение-неравенство называется *жестким* в ЗЛП, если для всякого оптимального решения этой ЗЛП оно выполняется как равенство, и *нежестким* в противном случае.

Следствие 3.34. *Пусть условия каждой из задач* (48) *и* (49) *совместны. Тогда в каждой паре ограничений*

$$x_j \geq 0 \quad \textit{и} \quad ua_j \geq c_j$$

одно неравенство жесткое, а одно нежесткое.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий теорему 3.32 и следствие 3.34. На рисунке 3.2 изображена часть границы области допустимых значений $uA \geq c$ двойственной задачи, и векторы a_1, $a_2 = b$, a_3. Неравенство $ua_2 = c_2$ — жесткое. Оптимальными решениями являются, например, $\widetilde{u}$, $\widetilde{u}'$. Пусть все компоненты вектора $\widetilde{x}$ равны нулю, кроме второй, которая равна 1. Так как $b = a_2$, то по теореме о дополняющей нежесткости $\widetilde{x}$ — оптимальное решение прямой задачи. Заметим, что векторы $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.32, в то время как вектор $\widetilde{u}'$ не удовлетворяет условиям этой теоремы ни при каком $\widetilde{x}$.

Упражнение 3.35. Написать ЗЛП, соответствующую рис. 3.2. Показать, что $\widetilde{u} = \alpha\widetilde{u}' + (1 - \alpha)\widetilde{u}''$ тогда и только тогда, когда $0 < \alpha < 1$.

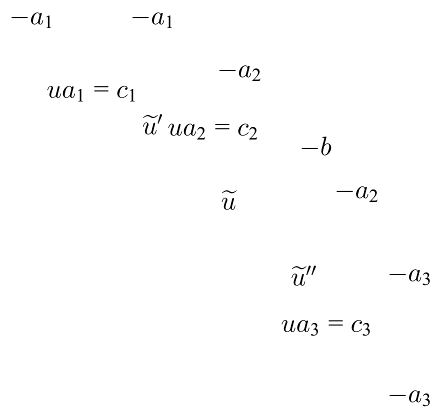

Рис. 3.2.

3.5. Множители Лагранжа

Напомним, что метод множителей Лагранжа[5] используется в математическом анализе для нахождения экстремума непрерывно-дифференцируемой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ при ограничениях вида $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, где $g_i(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывно-дифференцируемые функции. Метод состоит в нахождении стационарных точек вспомогательной функции

$$L(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

называемой *функцией Лагранжа*. Параметры $u_1, \dots, u_m$ называются *множителями Лагранжа*. Точка условного экстремума исходной задачи является стационарной точкой функции Лагранжа.

Метод множителей Лагранжа распространяется и на случай задач математического программирования (в которых могут появляться ограничения в виде равенств). Необходимые и достаточные условия оптимальности вектора для достаточно широкого класса задач математического программирования дает так называемая теорема Куна–Таккера. В данном разделе мы доказываем ряд теорем, которые являются частным случаем

[5]Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) — французский математик и механик.

теоремы Куна–Таккера применительно к задачам линейного программирования.

Рассмотрим пару двойственных задач

$$\begin{array}{ccc} \max cx & & \min ub, \\ \left\{ \begin{array}{l} Ax \leq b, \\ x \geq 0 \end{array} \right. & \text{и} & \begin{array}{l} uA \geq c, \\ u \geq 0 \end{array} \end{array} \tag{59}$$

Определение 3.36. *Функцией Лагранжа* для пары задач (59) называется функция

$$L(x, u) = cx + ub - uAx. \tag{60}$$

Заметим, что функцию Лагранжа можно записать, по-разному сгруппировав слагаемые:

$$L(x, u) = cx + u(b - Ax) = ub + (c - uA)x.$$

Как видно из этих записей, роль множителей Лагранжа для прямой задачи играют двойственные переменные $u = (u_1, \ldots, u_m)$, а для двойственной задачи — переменные прямой ЗЛП $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.

Лемма 3.37. *Пусть $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ — оптимальные векторы прямой и двойственной задач* (59) *соответственно, тогда*

$$L(\widetilde{x}, \widetilde{u}) = c\widetilde{x} = \widetilde{u}b. \tag{61}$$

Доказательство. Так как $\widetilde{u}A \geq c$ и $\widetilde{x} \geq 0$, то $\widetilde{u}A\widetilde{x} \geq c\widetilde{x}$, откуда

$$L(\widetilde{x}, \widetilde{u}) = c\widetilde{x} + \widetilde{u}b - \widetilde{u}A\widetilde{x} \leq \widetilde{u}b.$$

Так как $A\widetilde{x} \leq b$ и $\widetilde{u} \geq 0$, то $\widetilde{u}A\widetilde{x} \leq \widetilde{u}b$, откуда

$$L(\widetilde{x}, \widetilde{u}) = c\widetilde{x} + \widetilde{u}b - \widetilde{u}A\widetilde{x} \geq c\widetilde{x}.$$

Но по теореме двойственности $c\widetilde{x} = \widetilde{u}b$, откуда получаем (61). ∎

Теорема 3.38. *Для того, чтобы векторы $\widetilde{x} \geq 0$, $\widetilde{u} \geq 0$ были оптимальными векторами прямой и двойственной задачи* (59) *соответственно, необходимо и достаточно, чтобы $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$ являлось* седловой точкой *функции Лагранжа* (60)*, т. е. для всех $x \geq 0$ и всех $u \geq 0$ выполнялись неравенства*

$$L(x, \widetilde{u}) \leq L(\widetilde{x}, \widetilde{u}) \leq L(\widetilde{x}, u). \tag{62}$$

Доказательство.
Необходимость. Пусть $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ — оптимальные векторы прямой и двойственной задачи (59) соответственно. Так как $\widetilde{u}A \geq c$ и $x \geq 0$, то $\widetilde{u}Ax \geq cx$, откуда

$$L(x, \widetilde{u}) = cx + \widetilde{u}b - \widetilde{u}Ax \leq cx + \widetilde{u}b - cx = \widetilde{u}b.$$

Так как $A\widetilde{x} \leq b$ и $u \geq 0$, то $uA\widetilde{x} \leq ub$, откуда

$$L(\widetilde{x}, u) = c\widetilde{x} + ub - uA\widetilde{x} \geq c\widetilde{x} + ub - ub = c\widetilde{x}.$$

Итак, $L(x, \widetilde{u}) \leq \widetilde{u}b = c\widetilde{x} \leq L(\widetilde{x}, u)$. Теперь неравенства (62) получаются из соотношения (61).
Достаточность. Пусть неравенства (62) выполняются для всех $x \geq 0$ и всех $u \geq 0$. Сначала докажем, что векторы $\widetilde{x} \geq 0$ и $\widetilde{u} \geq 0$ являются допустимыми векторами прямой и двойственной задачи (59) соответственно. Действительно, из левого неравенства в (62) получаем

$$(c - \widetilde{u}A)x \leq (c - \widetilde{u}A)\widetilde{x}. \tag{63}$$

Полагая $x = (\widetilde{x}+e_j)$, где e_j — вектор-столбец, у которого все компоненты, кроме j-ой, равны нулю, а j-ая равна 1, из (63) получаем $(c - \widetilde{u}A)e_j \leq 0$, т. е. j-ая компонента вектора $c - \widetilde{u}A$ неположительна. Последовательнр полагая $j = 1, 2, \ldots, n$, получаем $c - \widetilde{u}A \leq 0$. Таким образом, $\widetilde{u}$ — допустимый вектор двойственной задачи. Рассматривая правое неравенство в (62) и проводя аналогичные рассуждения, можно получить, что $\widetilde{x}$ — допустимый вектор прямой задачи.

Из неравенства $L(0, \widetilde{u}) \leq L(\widetilde{x}, 0)$ следует $\widetilde{u}b \leq c\widetilde{x}$, откуда по теореме двойственности получаем, что $\widetilde{u}b = c\widetilde{x}$ и векторы $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ — оптимальные. ∎

Следствие 3.39.

$$\min_{u\geq 0}\max_{x\geq 0} L(x, u) = \max_{x\geq 0}\min_{u\geq 0} L(x, u).$$

Рассмотрим теперь пару двойственных задач вида

$$\begin{array}{ccc} \max cx & & \min ub \\ \left\{\begin{array}{l} Ax = b, \\ x \geq 0 \end{array}\right. & \text{и} & uA \geq c \end{array} \tag{64}$$

Функция Лагранжа для таких задач вводится согласно формуле (60). Аналогично теореме 3.38 доказывается следующее необходимое и достаточное условие.

Теорема 3.40. *Для того, чтобы векторы* $\widetilde{x} \geq 0$, $\widetilde{u}$ *были оптимальными векторами прямой и двойственной задачи* (64) *соответственно, необходимо и достаточно, чтобы* $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$ *являлось седловой точкой функции Лагранжа, т. е. для всех* $x \geq 0$ *и всех* u *выполнялись неравенства*

$$L(x, \widetilde{u}) \leq L(\widetilde{x}, \widetilde{u}) = L(\widetilde{x}, u).$$

Рассмотрим теперь пару двойственных задач в общей форме:

$$\max(c^{(1)}x^{(1)} + c^{(2)}x^{(2)}) \qquad\qquad \min(u^{(1)}b^{(1)} + u^{(2)}b^{(2)})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}x^{(1)} + A_{12}x^{(2)} = b^{(1)}, \\ A_{21}x^{(1)} + A_{22}x^{(2)} \leq b^{(2)}, \\ x^{(1)} \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} u^{(1)}A_{11} + u^{(2)}A_{21} \geq c^{(1)}, \\ u^{(1)}A_{12} + u^{(2)}A_{22} = c^{(2)}, \\ u^{(2)} \geq 0. \end{array} \right. \tag{65}$$

Определение 3.41. *Функцией Лагранжа* для пары задач (65) называется функция

$$\begin{aligned} L(x, u) &= c^{(1)}x^{(1)} + c^{(2)}x^{(2)} \\ &+ u^{(1)}(b^{(1)} - A_{11}x^{(1)} - A_{12}x^{(2)}) + u^{(2)}(b^{(2)} - A_{11}x^{(1)} - A_{12}x^{(2)}). \end{aligned} \tag{66}$$

Заметим, что если ввести обозначения:

$$c = (c^{(1)}, c^{(2)}), \qquad b = \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

то функция Лагранжа примет такой же вид, как и в (60).

Теорема 3.42. *Пусть* $\widetilde{x} = (\widetilde{x}^{(1)}; \widetilde{x}^{(2)})$. $\widetilde{u} = (\widetilde{u}^{(1)}, \widetilde{u}^{(2)})$ *— допустимые векторы задач* (59). *Для того, чтобы* $\widetilde{x}$. $\widetilde{u}$ *были оптимальными векторами этих задач необходимо и достаточно, чтобы* $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$ *было седловой точкой функции Лагранжа, т. е. для всех* $x = (x^{(1)}; x^{(2)})$ *и всех* $u = (u^{(1)}, u^{(2)})$, *таких, что* $x^{(1)} \geq 0$, $u^{(2)} \geq 0$, *выполнялись неравенства*

$$L(x, \widetilde{u}) \leq L(\widetilde{x}, \widetilde{u}) = L(\widetilde{x}, u).$$

Упражнение 3.43. Докажите теоремы 3.40, 3.42.

3.6. Двойственный симплекс-метод

Теорема двойственности подсказывает, что симплекс-метод, примененный к двойственной задаче, может дать и решение прямой задачи (по крайней мере, если обе ЗЛП имеют допустимые векторы). Различные реализации этой идеи приводят к семейству процедур, объединяемых под названием «*двойственный симплекс-метод*». В отличие от них, методы решения ЗЛП, рассмотренные в главе 2, образуют семейство алгоритмов, объединяемых под названием «*прямой симплекс-метод*».

Рассмотрим каноническую задачу (48). Пусть $\mathscr{B} = \langle j_1, \ldots, j_n \rangle$ — некоторая база, $Q = (q_{ij})$ — соответствующая симплекс-таблица, $\widetilde{x}$ — соответствующее базисное решение.

Определение 3.44. Если $q_{0j} \geq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), то база $\mathscr{B}$ называется *двойственно допустимой* базой, или *псевдобазой*, таблица Q — *двойственно допустимой* таблицей, а вектор $\widetilde{x}$ — *двойственно допустимым базисным решением*, или *псевдопланом*.

Идея двойственного симплекс-метода состоит в том, чтобы переходя от одной двойственно допустимой базы к другой, получить такую базу, для которой $q_{i0} \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, s$).

3.6.1. Двойственный симплекс-метод в строчечной форме

Алгоритм 3. [Двойственный симплекс-метод в строчечной форме.]

Шаг 0. Начать с двойственно допустимой базы $\mathscr{B}$ и соответствующей ей таблицы Q.

Шаг 1. Если $q_{i0} \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), конец. Базисное решение, соответствующее базе $\mathscr{B}$, оптимально. Иначе выбрать такое r, что $q_{r0} < 0$.

Шаг 2. Если $q_{rj} \geq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), конец. Условия задачи несовместны. Иначе выбрать такое s, что.

$$\frac{q_{0s}}{|q_{rs}|} = \min\left\{ \frac{q_{0j}}{|q_{rj}|} : \quad q_{rj} < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \right\}. \qquad (67)$$

Шаг 3. (Шаг гауссова преобразования.) Поделить r-ую строку матрицы Q на q_{rs}. Для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, m\} \setminus \{r\}$ из i-ой строки вычесть r-ую, умноженную на q_{is}.

Шаг 4. В $\mathscr{B} = \langle j_1, \ldots, j_m \rangle$ в качестве j_r взять s. Вернуться на шаг 1.

Определение 3.45. Как и ранее, переход от текущей базы к соседней в алгоритме 3, называется *итерацией*. Столбец s, строка r и элемент q_{rs} называются *направляющими*.

Нетрудно проверить, что выбор направляющего столбца s по формуле (67) гарантирует сохранение двойственной допустимости и уменьшение значения целевой функции при $q_{0s} > 0$.

Пример 3.46. Решим двойственным симплекс-методом ЗЛП

$$\max(-x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 \qquad = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \qquad + x_6 = -2, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

Выбрав за базу $\mathscr{B} = \langle 5, 6 \rangle$, получим исходную двойственно-допустимую таблицу

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & \boxed{-4} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Выбирая r, соответствующее наименьшему из q_{i0}, получим $r = 2$, и далее по (67) имеем $s = 4$:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} -1/2 & 5/4 & 1/2 & 7/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ \hline -2 & \boxed{-1/2} & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 & -3/4 & 1 & 0 & -1/4 \end{array}\right).$$

Теперь $r = 2$, $s = 2$:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} -11/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 5/2 & 3/2 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 3/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

Последняя таблица соответствует оптимальному решению $(4, 0, 0, 3/2, 0, 0)^\top$.

Замечание 3.47. Пусть $\widetilde{x}$ — базисное решение задачи (48), соответствующее базе $\mathscr{B}$ и пусть $A = (B, N)$, $c = (c_{\mathscr{B}}, c_{\mathscr{N}})$, где B — подматрица, образованная базисными столбцами, а $c_{\mathscr{B}}$, $c_{\mathscr{N}}$ — векторы, составленные из базисных и небазисных компонент вектора c соответственно. Рассмотрим вектор цен $\widetilde{u} = c_{\mathscr{B}} B^{-1}$, соответствующий базе $\mathscr{B}$. Если база $\mathscr{B}$ — двойственно допустимая, то вектор относительных оценок неотрицателен и из замечания 2.31 следует, что $c - \widetilde{u}A \geq 0$. Таким образом, вектор цен $\widetilde{u}$, сответствующий базисному двойственно допустимому решению $\widetilde{x}$, является допустимым решением двойственной задачи (49). Можно сделать вывод, что движению по двойственно допустимым базисным решениям прямой задачи в двойственном симплекс-методе соответствует движение по допустимым решениям двойственной задачи.

Замечание 3.48. Двойственный симплекс-метод удобно применять, если решается последовательность задач, различающихся только вектором b, так как в этом случае оптимальное решение предыдущей задачи будет двойственно допустимым решением последующей задачи.

3.6.2. Двойственный симплекс-метод в столбцовой форме

Двойственный симплекс-метод, как и прямой, можно реализовать как в строчечной, так и в столбцовой форме. Приведем пошаговое описание двойственного симплекс-метода в столбцовой форме, который будет интенсивно использоваться в главе 5.

Алгоритм 4. [Двойственный симплекс-метод в столбцовой форме.]

Шаг 0. Начать с двойственно допустимой базы $\mathscr{B}$. Пусть $\mathscr{N} = \langle k_1, \ldots, k_{n-m} \rangle$ — некоторая перестановка номеров небазисных переменных, а T — соответствующая столбцовая симплекс-таблица.

Шаг 1. Если $t_{i0} \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), конец. Текущее базисное решение оптимально. Иначе выбрать такое r, что $t_{r0} < 0$.

Шаг 2. Если $t_{rj} \leq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n - m$), конец. Условия задачи несовместны. Иначе выбрать такое s, что

$$\frac{t_{0s}}{|t_{rs}|} = \min\left\{\frac{t_{0j}}{|t_{rj}|} : \quad t_{rj} < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n - m)\right\}.$$

Шаг 3. (Шаг гауссова преобразования.) Поделить s-ый столбец матрицы T на $-t_{rs}$. Для каждого $j \in \{0, 1, \ldots, n - m\} \setminus \{s\}$ прибавить к j-му столбцу s-ый, умноженный на t_{rj}.

Шаг 4. В $\mathscr{N} = \langle k_1, \ldots, k_{n-m}\rangle$ в качестве k_s взять r. Вернуться на шаг 1.

Пример 3.49.

$$T^{(0)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & \boxed{-4} \end{array}\right),$$

$$T^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cccc} -1/2 & 5/4 & 1/2 & 7/4 & 1/4 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 & -3/4 & -1/4 \\ -2 & \boxed{-1/2} & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

$$T^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccc} -11/2 & 5/2 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ \hline 4 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Для предотвращения зацикливания используют лексикографический вариант метода.

Определение 3.50. Столбцовая симплекс-таблица T называется *лексикографически допустимой*, или *$\mathscr{L}\mathscr{D}$-допустимой*, если все ее столбцы, кроме, быть может, нулевого, лексикографически положительны.

Определение 3.51. Алгоритм 4, в котором номер r направляющей строки выбирается произвольно, но так, что $t_{r0} < 0$, а номер s направляющего столбца выбирается по критерию

$$\frac{1}{|t_{rs}|}(t_{0s}, t_{1s}, \dots, t_{ns})^\top = \operatorname{lexmin}\left\{\frac{1}{|t_{rj}|}(t_{0j}, t_{1j}, \dots, t_{nj})^\top : \quad t_{rj} < 0\right\}.$$

называется *лексикографическим двойственным симплекс-методом* в столбцовой форме, или *$\mathscr{L}\mathscr{D}$-методом*.

Упражнение 3.52. Доказать, что лексикографический двойственный симплекс-метод, примененный к лексикографически допустимой таблице, конечен.

3.7. Задачи

3.1. Проверить оптимальность указанных векторов в ЗЛП и найти другие оптимальные векторы, если они есть:

$$\widetilde{x} = (0,1,1),$$

$$\max(-4x_1 + x_2 + 5x_3)$$

$$\begin{cases} \phantom{3x_1 + {}} x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3); \end{cases}$$

$$\widetilde{x} = (3,4,0),$$

$$\max(x_1 + 2x_2 - 5x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 11x_3 = -9, \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3); \end{cases}$$

$$\widetilde{x} = (1,1,1,1,1,1,1,1),$$

$$\max(5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 10x_5 - 2x_6 - 3x_7 - 6x_8)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - x_6 + x_7 - x_8 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 6x_5 - x_6 - x_7 - 2x_8 = 13, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 4x_5 - x_6 - 2x_7 - 4x_8 = 9, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,8). \end{cases}$$

3.2. Для ЗЛП из задачи 3.1 проиллюстрировать свойство дополняющей нежесткости в сильной форме.

3.3. Для каждого неравенства ЗЛП

$$\min(10x_1 + 3x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5, \\ -11x_1 - 4x_2 - 2x_3 \geq -11, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3). \end{cases}$$

определить, является ли оно жестким.

3.4. Найти решение задачи линейного программирования

$$\max(3x_1 + 5x_2 + 4x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + 4x_3 \geq 1 \end{cases}$$

сначала двойственным симплекс-методом, а затем прямым методом, применив его к двойственной задаче.

3.5. Пусть $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$ — решения систем

$$\begin{cases} Ax \leq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} uA \geq 0, \\ u \geq 0 \end{cases} \tag{68}$$

соответсвтвенно. Показать, что $\widetilde{u}A\widetilde{x} = 0$. Однородные системы неравенств (68) называются *двойственными*.

3.6. Для двойственных систем (68) показать существование таких $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$, что $\widetilde{x} + \widetilde{u}A > 0$, $\widetilde{u} - A\widetilde{x} > 0$.

Глава 4

Транспортная задача

4.1. Постановка задачи и основные свойства

В настоящей главе рассматривается так называемая классическая *транспортная задача*, в англоязычной литературе называемая также задачей Хитчкока–Купманса[1]. По-видимому, первым, кто начал исследование этой задачи, был А. Н. Толстой[2] (1930 г.).

Пусть на m складах имеются различные количества некоторого товара, который необходимо доставить в n пунктов назначения. Точнее, i-ый склад располагает количеством товара, равным a_i, тогда как j-ый пункт назначения должен получить b_j единиц товара. Предполагается, что суммарный спрос равен суммарному предложению, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Кроме величин a_i, b_j заданы величины c_{ij}, представляющие собой затраты на перевозку единицы груза от i-го склада до j-го пункта назначения. Требуется определить количества единиц товара x_{ij}, подлежащих транспортировке от i-го склада в j-ый пункт назначения ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$), чтобы при этом все запасы были исчерпаны, потребители удовлетворены и был достигнут минимум суммарных затрат.

---

[1] Франк Л. Хитчкок (1875–1957) — американский физик и математик.

[2] А. Н. Толстой — советский математик.

Таким образом, транспортная задача имеет следующий вид:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = 1, \ldots, m), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1, \ldots, n), \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{69}$$

Раскроем встречающиеся суммы и обратим внимание на специальный вид матрицы ограничений:

$$\min(c_{11}x_{11} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn})$$
$$\begin{cases} x_{11} + \ldots + x_{1n} & & & = a_1, \\ & + x_{21} + \ldots + x_{2n} & & = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ & & + x_{m1} + \ldots + x_{mn} & = a_m, \\ x_{11} & + x_{21} & + x_{m1} & = b_1, \\ \quad x_{12} & \quad + x_{22} & \quad + x_{m2} & = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \qquad x_{1n} & \qquad + x_{2n} & \qquad + x_{mn} & = b_n, \\ \multicolumn{4}{c}{x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).} \end{cases}$$

Используя матричную нотацию, транспортную задачу можно записать в виде

$$\min cx$$
$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

где

$$b = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top,$$
$$c = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn}),$$
$$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})^\top,$$

$$
A = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & \dots & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \dots & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{array}\right).
$$

Заметим, что матрица A имеет размеры $(m+n) \times (m \cdot n)$. Компоненты решения x и вектора цен c удобно также записывать соответственно в матрицы $X = (x_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$.

Мы видим, что транспортная задача является частным случаем ЗЛП и может быть решена общими методами, описанными выше, однако специальный вид матрицы ограничений позволяет предложить более удобную для использования модификацию симплекс-метода.

Утверждение 4.1. *Для совместности задачи* (69) *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$
a_i \geq 0, \quad b_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n),
$$
$$
\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.
$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим вектор x, в котором

$$
x_{ij} = \frac{a_i b_j}{S} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n), \quad \text{где} \quad S = \sum_{i=1}^{m} a_i,
$$

если $S \neq 0$, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. ∎

Утверждение 4.2. *Ранг матрицы A ограничений транспортной задачи* (69) *равен $m + n - 1$.*

Доказательство. Строки матрицы A образуют линейно зависимую систему, так как сумма первых m строк совпадает с суммой последних n строк, поэтому $\operatorname{rank} A \leq m + n - 1$. С другой стороны, минор

$(m+n-1)$-го порядка, составленный из столбцов, соответствующих переменным $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1,n-1}$, и всех строк, за исключением последней, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

поэтому $\operatorname{rank} A \geq m+n-1$. ∎

4.2. Унимодулярные матрицы

Определение 4.3. Квадратная целочисленная матрица называется *унимодулярной*, если ее определитель равен ± 1. Целочисленная (не обязательно квадратная) матрица называется *вполне унимодулярной*, если любой ее минор равен ± 1 или 0.

Утверждение 4.4. *Матрица ограничений A транспортной задачи вполне унимодулярна.*

Доказательство. Отметим следующие свойства матрицы A:

1) Элементы матрицы — нули и единицы.

2) Каждый столбец содержит ровно две единицы.

3) Сумма первых m строк (назовем их строками 1-ой группы) совпадает с суммой последних n строк (назовем их строками 2-ой группы).

Очевидно, что любой минор 1-го порядка равен 0 или 1. В предположении, что всякий минор k-го порядка равен ± 1 или 0, докажем, что таким же свойством обладает произвольный минор M порядка $(k+1)$. Пусть в этом миноре нашелся столбец, содержащий ровно одну единицу.

Раскрывая M по этому столбцу и используя предположение индукции, получаем, что M равен ± 1 или 0. Теперь предположим, что в M нет ни одного столбца с одной единицей. Тогда из свойств 2) и 3) получаем, что сумма строк минора M, соответствующих строкам матрицы A 1-ой группы, равна сумме строк, соответствующих строкам 2-ой группы, поэтому $M = 0$. ∎

Упражнение 4.5. Пусть каждый столбец целочисленной матрицы A с элементами $\pm 1, 0$ содержит не более двух ненулевых элементов, причем строки матрицы можно разбить на две группы, такие, что в каждом столбце ненулевые элементы одного знака находятся в строках из разных групп, а ненулевые элементы разных знаков — в одной группе. Доказать, что матрица A вполне унимодулярна.

Следствие 4.6. *Если в условиях транспортной задачи* (69) *коэффициенты a_i и b_j целые, то любой базисный вектор этой задачи целочислен.*

Доказательство. Небазисные переменные допустимого базисного вектора равны нулю, а базисные получаются в результате решения системы линейных уравнений $Bx_{\mathscr{B}} = b_{\mathscr{B}}$ с невырожденной матрицей B. По предыдущему утверждению $\det B = \pm 1$, поэтому из формул Крамера следует, что компоненты $x_{\mathscr{B}}$ целочисленны. ∎

4.2.1. Задача о назначениях

Следствие 4.6 имеет большое значение, так как известно большое число задач, сводящихся к транспортной задаче с дополнительным условием целочисленности решения. В качестве примера рассмотрим так называемую *задачу о назначениях*.

Пусть имеется n работ и n механизмов и задана производительность c_{ij} i-го механизма на j-ой работе ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Требуется установить взаимно однозначное соответствие между механизмами и работами так, чтобы общая производительность была максимальной.

Для построения математической модели введем переменные x_{ij}, принимающие значение 0 или 1 в зависимости от того, назначен или нет i-ый механизм на j-ую работу. Получаем следующую задачу:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{70}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{71}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{72}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}. \tag{73}$$

Ввиду (71) условие (73) можно заменить условиями

$$x_{ij} \geq 0 \tag{74}$$

$$x_{ij} \in \mathbf{Z} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n). \tag{75}$$

По следствию 4.6 ограничения (75) можно опустить. Итак, задача о назначениях (70)–(73) эквивалентна транспортной задаче (70)–(72), (74).

4.3. Графовая характеристика планов транспортной задачи

Обозначим p_{ij} столбец матрицы A, соответствующий переменной x_{ij}. Заметим, что

$$p_{ij} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^{\top},$$

где единицы стоят на i-ом и $(m + j)$-ом местах, а на остальных местах — нули. Пусть

$$p_{i_1 j_1},\ p_{i_2 j_2},\ \ldots,\ p_{i_t j_t} \tag{76}$$

— некоторая система столбцов матрицы A. Построим по этой системе граф следующим образом. Вершинами графа будут точки (i, j) декартовой плоскости, для которых соответствующий им столбец p_{ij} входит в данный набор. Две вершины соединим ребром, если они лежат на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других вершин графа. Рассматриваемый граф, удобно изображать поверх таблиц X и C: вершина графа, соответствующая столбцу p_{ij}, помещена в центр клетки (i, j).

Утверждение 4.7. *Для того, чтобы система* (76) *была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий этой системе граф не содержал циклов.*

Доказательство.
Необходимость. Предположим, что в графе есть цикл, образованный вершинами

$$(i_0, j_0),\ (i_1, j_1),\ \ldots,\ (i_t, j_t), \tag{77}$$

перечисленными в порядке обхода ($i_0 = i_t$, $j_0 = j_t$). В цикле (77) могут быть вершины двух типов. Вершину (i_k, j_k) назовем *угловой*, если соседние с ней вершины (i_{k-1}, j_{k-1}) и (i_{k+1}, j_{k+1}) не лежат на одной горизонтали или вертикали. В противном случае вершина *неугловая*. Если в (77) нет угловых вершин, то, очевидно, справедливо равенство

$$p_{i_1j_1} - p_{i_2j_2} + \ldots - p_{i_tj_t} = 0.$$

Если же в (77) не все вершины угловые, то аналогичное равенство можно записать, предварительно исключив из последовательности (77) все неугловые вершины. В обоих случаях система (76) линейной зависима.
Достаточность. Пусть система (76) линейно зависима. Тогда найдется нетривиальный набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, такой, что

$$\alpha_1 p_{i_1j_1} + \ldots + \alpha_t p_{i_tj_t} = 0. \tag{78}$$

Пусть $\alpha_k \neq 0$ для некоторого $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Так как i_k-ая и $(m + j_k)$-ая компоненты столбца $p_{i_kj_k}$ равна единице, то для того, чтобы (78) выполнялось, необходимо, чтобы в системе (77) нашлись столбец, у которого i_k-ая компонента равна 1, и столбец, у которого $(m + j_k)$-ая компонента равна 1. Таким образом, всякая вершина (i_k, j_k) с $\alpha_k \neq 0$ смежна двум другим вершинам. Ввиду конечности числа вершин в графе, он содержит цикл. ∎

Следствие 4.8. *Пусть $t = m + n - 1$. Для того, чтобы система*

$$p_{i_1j_1},\ p_{i_2j_2},\ \ldots,\ p_{i_tj_t}$$

образовывала столбцовую базу матрицы A ограничений транспортной задачи, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий этой системе граф не содержал циклов.

4.4. Способы получения начального допустимого базисного вектора

С каждой столбцовой базой транспортной задачи свяжем упорядоченный набор $\mathscr{B}$, состоящий из пар вида (i, j), где p_{ij} — столбец матрицы

A, входящий в базу. Так, например, если система (76) образует базу, то

$$\mathscr{B} = \langle (i_0, j_0),\ (i_1, j_1),\ \ldots,\ (i_t, j_t) \rangle .$$

Как и ранее, для краткости, $\mathscr{B}$ тоже будем называть *базой*.

Рассмотрим два способа построения начального допустимого базисного вектора.

4.4.1. Метод северо-западного угла

Метод заключается в заполнении матрицы X, начиная с клетки, расположенной в левом верхнем углу, по следующим правилам.

Алгоритм 5. [Метод северо-западного угла]

Шаг 0. Присвоить всем x_{ij} значение 0. Положить $\widetilde{a}_i = a_i$, $\widetilde{b}_j = b_j$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), $\mathscr{B} = \emptyset$, $i = 1$, $j = 1$.

Шаг 1. В $\mathscr{B}$ добавить (i, j).

Шаг 2. Если $\widetilde{a}_i < \widetilde{b}_j$, то положить $x_{ij} = a_i$, $\widetilde{b}_j = \widetilde{b}_j - a_i$, увеличить i на 1. Иначе положить $x_{ij} = b_j$, $\widetilde{a}_i = \widetilde{a}_i - b_j$, увеличить j на 1.

Шаг 3. Если $i < m$ или $j < n$, то перейти на шаг 1. Иначе конец. База $\mathscr{B}$ и начальное допустимое базисное решение $X = (x_{ij})$ построены.

Пример 4.9. Рассмотрим транспортную задачу, в которой

$$\begin{array}{lll}
a_1 = 65, & a_2 = 50, & a_3 = 70, \\
b_1 = 40, & b_2 = 85, & b_3 = 60, \\
c_{11} = 4, & c_{12} = 5, & c_{13} = 6, \\
c_{21} = 2, & c_{22} = 3, & c_{23} = 1, \\
c_{31} = 3, & c_{32} = 3, & c_{33} = 3.
\end{array}$$

Компактно исходные данные и компоненты найденного по методу северо-западного угла начального допустимого решения запишем в виде следующей таблицы:

	40	85	60
65	4	5	6
	40	25	
50	2	3	1
		50	
70	3	3	3
		10	60

Слева от таблицы указаны величины a_i, сверху записаны b_j. В левом верхнем углу каждой клетки (i, j) стоит c_{ij}. Если $(i, j) \in \mathscr{B}$, то в правом нижнем углу соответствующей клетки записана величина x_{ij}. Построена база

$$\mathscr{B} = \langle (1,1),\ (1,2),\ (2,2),\ (3,2),\ (3,2) \rangle \,.$$

Очевидно, шаг 1 алгоритма 5 будет выполняться $m+n-1$ раз. При заполнении очередной клетки мы переходим либо к соседней справа, либо к соседней снизу, откуда следует, что граф, соответствующий построенному множеству $\mathscr{B}$, не содержит циклов. Выполнение ограничений транспортной задачи очевидно. Итак, $\mathscr{B}$ является базой.

4.4.2. Метод минимального элемента

В методе минимального элемента используется эвристическое соображение, по которому сначала заполняются клетки x_{ij} с меньшим значением c_{ij}.

Алгоритм 6. [Метод минимального элемента]

Шаг 0. Присвоить всем x_{ij} значение 0. Положить $\widetilde{a}_i = a_i$, $\widetilde{b}_j = b_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, $\mathscr{B} = \emptyset$, $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Шаг 1. Выбрать r, s, такие, что $c_{rs} = \min\{c_{ij} : i \in I, j \in J\}$. Добавить (r, s) в $\mathscr{B}$.

Шаг 2. Положить $x_{rs} = \min\left\{\widetilde{a}_r, \widetilde{b}_s\right\}$, $\widetilde{a}_r = \widetilde{a}_r - x_{rs}$, $\widetilde{b}_s = \widetilde{b}_s - x_{rs}$. Если $\widetilde{a}_r = 0$, то исключить r из I. Иначе исключить s из J.

Шаг 3. Если $I \neq \emptyset$ и $J \neq \emptyset$, то перейти на шаг 1.

Шаг 4. [В вырожденном случае надо дописать еще несколько нулей.] Если $I = \emptyset$, то добавить в $\mathscr{B}$ пары вида (r, j), где j принимает все значения из J, кроме одного (любого). Иначе добавить в $\mathscr{B}$ пары вида (i, s), где i принимает все значения из I, кроме одного (любого). База $\mathscr{B}$ и начальное допустимое базисное решение $X = (x_{ij})$ построены.

Пример 4.10. Рассмотрим задачу из примера 4.9. Метод минимального элемента приводит к следующей базе и следующей таблице:

$$\mathscr{B} = \langle (1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2) \rangle$$

	40	85	60
65	4	5 55	6 10
50	2	3	1 50
70	3 40	3 30	3

Покажем, что таблица X, полученная по алгоритму 6, является допустимым базисным решением. Пусть в графе, построенному по множеству $\mathscr{B}$, существует цикл, и пусть

$$(i_1, j_1),\ (i_2, j_2), \ldots, (i_s, j_s)$$

— его угловые клетки в порядке обхода. Далее пусть $(i_k,\ j_k)$ — клетка цикла, которая заполнилась раньше других клеток цикла. Тогда в момент перед заполнением клетки $(i_{k-1},\ j_{k-1})$ было $\widetilde{a}_{j_{k-1}} \neq 0$ и $\widetilde{b}_{j_{k-1}} \neq 0$, а в момент перед заполнением клетки $(i_{k+1},\ j_{k+1})$ было $\widetilde{a}_{j_{k+1}} \neq 0$ и $\widetilde{b}_{j_{k+1}} \neq 0$. Но этого не может быть, так как после заполнения клетки $(i_k,\ j_k)$ либо a_{i_k}, либо b_{j_k} обратилось в нуль.

4.5. Пересчет базисного решения при изменении базы

Пусть X — базисное решение, соответствующее базе

$$\mathscr{B} = \langle (i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_{m+n-1}, j_{m+n-1}) \rangle .$$

Добавим к базе еще один элемент (i, j), тогда граф, соответствующий полученной системе, по утверждению 4.7 содержит цикл, очевидно, единственный. Для определенности будем считать, что угловыми элементами этого цикла являются

$$(i, j),\ (i_1, j_1),\ (i_2, j_2),\ \ldots,\ (i_{s-1}, j_{s-1}),$$

причем

$$i = i_1,\ j_1 = j_2,\ \ldots,\ i_{s-2} = i_{s-1},\ j_{s-1} = j$$

(см. рис. 4.1). Заметим, что s — четно. Определим вектор $X' = (x'_{ij})$ следующим образом:

$$x'_{ij} = x_{ij} + \theta,\ x'_{i_1 j_1} = x_{i_1 j_1} - \theta,\ x'_{i_2 j_2} = x_{i_2 j_2} + \theta,\ \ldots,\ x'_{i_{s-1} j_{s-1}} = x_{i_{s-1} j_{s-1}} - \theta,$$

где θ — некоторое положительное число. Остальные компоненты вектора X' будут совпадать с соответствующими компонентами X. Очевидно, X' удовлетворяет все ограничениям транспортной задачи (69) кроме, быть может, ограничений $x'_{ij} \geq 0$. Для того, чтобы эти ограничения были выполнены, необходимо, чтобы

$$x_{i_k j_k} - \theta \geq 0, \quad (k = 1, 3, \ldots, s-1). \tag{79}$$

Если положить

$$\theta = \min \{ x_{i_k j_k} : k = 1, 3, \ldots, s-1 \} ,$$

то, очевидно, условие (79) будет выполнено и, кроме того, хотя бы одна из компонент, для определенности, x'_{i_r, j_r}, обратится в ноль. В базе $\mathscr{B}$ заменим (i_r, j_r) на (i, j). Полученная таким образом база $\mathscr{B}'$ соответствует допустимому базисному решению X'. Заметим, что если база $\mathscr{B}'$ невырождена, то (i_r, j_r) определяется единственным образом.

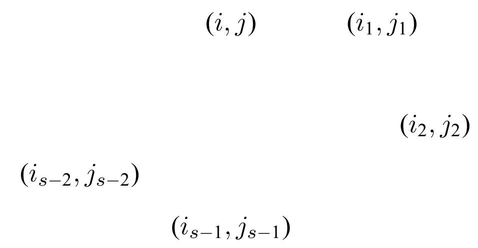

Рис. 4.1.

4.6. Метод потенциалов

В этом разделе мы опишем способ нахождения элемента, вводимого в базу. Этот способ называется *методом потенциалов*.

Идея метода заключается в следующем. Для текущей базы $\mathscr{B}$ находятся соответствующие ей цены (см. определение 2.29 из раздела 2.5), называемые в данном случае *потенциалами*. Затем с помощью этих цен, используя утверждение 2.30, строятся текущие относительные оценки (элементы нулевой строки симплекс-таблицы), среди которых выбирается отрицательная.

Перейдем к более детальному описанию метода. Обозначим потенциалы, соответствующие верхним m строкам матрицы A, через u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), а потенциалы, соответствующие нижним n строкам матрицы A, через v_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Напомним, что система ограничений транспортной задачи переопределена. Согласно замечанию 2.34 в качестве цен (потенциалов) можно взять произвольное решение системы $u\widetilde{B} = c_{\mathscr{B}}$, которая в нашем случае имеет вид:

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad (i,\, j) \in \mathscr{B}.$$

Ранг этой системы совпадает с рангом матрицы A и равен $m+n-1$, следовательно, количество свободных переменных равно 1. Нетрудно видеть, что в качестве свободной переменной можно выбрать любую, полагая ее равной произвольному значению. Действительно, в силу того, что граф, соответствующий базе $\mathscr{B}$, связен и не содержит циклов, по этому значению однозначно определяются величины остальных потенциалов.

Формула $\widehat{c} = c - uA$ для нахождения относительных оценок $\widehat{c}_{ij}$ в нашем случае приобретает вид: $\widehat{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$. Если $\widehat{c}_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$), т. е.

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n), \tag{80}$$

то текущая база $\mathscr{B}$ оптимальна. В противном случае выберем произвольную пару $(i, j) \notin \mathscr{B}$, для которой $\widehat{c}_{ij} < 0$ и по способу, описанному в разделе 4.5, найдем элемент, выводимый из $\mathscr{B}$.

Замечание 4.11. Запишем ЗЛП, двойственную (69). Обозначим переменные двойственной задачи, соответствующие верхним m строкам матрицы A, через u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), а переменные, соответствующие нижним n строкам матрицы A, — через u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Двойственная ЗЛП выглядит следующим образом:

$$\max \left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right)$$
$$u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Заметим, что условия оптимальности (80) текущей базы совпадают с условиями допустимости вектора $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m)$.

Пример 4.12. Решим методом потенциалов транспортную задачу из примера 4.9, опираясь на начальную базу

$$\mathscr{B}^{(0)} = \langle (1, 2),\ (1, 3),\ (2, 3),\ (3, 1),\ (3, 2) \rangle\,,$$

найденную в примере 4.10. Для начального базисного решения получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 5, \\ u_1 + v_3 = 6, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_3 + v_1 = 3, \\ u_3 + v_2 = 3, \end{cases}$$

из которой, полагая $u_1 = 0$, последовательно получаем $v_2 = 5$, $v_3 = 6$, $u_2 = -5$, $v_1 = 5$, $v_5 = 5$. Ограничение $u_i + v_j \leq c_{ij}$ не выполнится, например, при $i = 1$, $j = 1$. Поэтому вводим $(1, 1)$ в базу. Чтобы определить, какой элемент будет выведен из базы, найдем возникший цикл:

	40	85	60	
65	4 +	5 − 55	6 10	$u_1 = 0$
50	2	3	1 50	$u_2 = -5$
70	3 − 40	3 + 30	3	$u_3 = -2$
	$v_1 = 5$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$	

Минимальным среди элементов x_{ij}, стоящих в клетках, отмеченных символом «−», является $x_{31} = 40$, поэтому исключим $(3,1)$ из базы. Получаем новую базу $\mathscr{B}^{(1)} = \langle(1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (1,1),\ (3,2)\rangle$ и пересчитываем базисное решение:

	40	85	60	
65	4 40	5 + 15	6 − 10	0
50	2	3	1 50	−5
70	3	3 − 70	3 +	−2
	4	5	6	

Вычислим текущее значение потенциалов. Как и выше, значения переменных u_i запишем справа от таблицы, а значения переменных v_j — снизу от таблицы. Ограничение $u_i + v_j \leq c_{ij}$ не выполняется при $i = j = 3$. Поэтому вводим в базу $(3,3)$. Чтобы определить, какой элемент будет выведен из базы, в образовавшемся цикле среди x_{ij}, отмеченных знаком «−», определим минимальный. Им является $x_{13} = 10$, поэтому исключим $(1,3)$ из базы. Получаем новую базу $\mathscr{B}^{(2)} = \langle(1,2),\ (3,3),\ (2,3),\ (1,1),\ (3,2)\rangle$, пересчитываем базисное решение и текущие значения потенциалов:

	40	85	60	
65	(4) 40	(5) 25	(6)	0
50	(2)	(3)	(1) 50	−4
70	(3)	(3) 60	(3) 10	−2
	4	5	5	

Все неравенства $u_i + v_j \leq c_{ij}$ выполнены, следовательно, текущее базисное решение

$$x_{11} = 40, \quad x_{12} = 25, \quad x_{23} = 50, \quad x_{32} = 60, \quad x_{33} = 10,$$
$$x_{13} = x_{21} = x_{22} = x_{31} = 0$$

оптимально. Значение целевой функции равно

$$4 \cdot 40 + 5 \cdot 25 + 1 \cdot 50 + 3 \cdot 60 + 3 \cdot 10 = 545.$$

Пример 4.13. Рассмотрим пример решения вырожденной задачи. Приведем соответсвующие таблицы. Начальное базисное решение найдем методом минимального элемента.

	40	85	60
50	(2)	(1) 50	(5)
60	(3) 40	(4)	(3) 20
75	(4)	(6) 35	(6) 40

	40	85	60	
50	(2)	(1) 50	(5)	0
60	(3) − 40	(4)	(3) + 20	2
75	(4) +	(6) 35	(6) − 40	5
	1	1	1	

	40	85	60	
50	^{2}	^{1} 50	^{5}	0
60	^{3} − 0	^{4} +	^{3} 60	4
75	^{4} + 40	^{6} − 35	^{6}	5
	−1	1	−1	

	40	85	60	
50	^{2}	^{1} 50	^{5}	0
60	^{3}	^{4} 0	^{3} 60	4
75	^{4} 40	^{6} 35	^{6}	5
	−1	1	−1	

Глава 5

Целочисленное линейное программирование

5.1. Основные определения

Добавив к ЗЛП требование целочисленности всех или части ограничений, мы получаем так называемую *задачу целочисленного линейного программирования*.

Определение 5.1. Задача максимизации или минимизации линейной функции при линейных ограничениях, в которой на значения всех или части переменных наложено требование целочисленности, называется *задачей целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП)* (ЗЦЛП). В первом случае говорят о задаче *полностью целочисленного линейного программирования*, а во втором — о задаче *частично целочисленного линейного программирования*. Если коэффициенты ограничений и целевой функции в ЗЦЛП целые, то говорят о *целочисленной* ЗЦЛП.

Определение 5.2. Если некоторая переменная в ЗЦЛП может принимать только значения 0 или 1, то такая переменная называется *булевой*, или $\{0,1\}$-*переменной*. Если все переменные в ЗЦЛП булевы, то задача называется *задачей булева линейного программирования*.

На первый взгляд может показаться, что дополнительное требование целочисленности не усложняет задачу. Действительно, в некоторых примерах это так. Например, в разделе 4.1 (теорема 4.6) мы видели, что оптимальное базисное решение транспортной задачи с целыми коэффициентами является целочисленным, и поэтому метод потенциалов, примененный к такой задаче, приводит к целочисленному решению. Аналогичное утверждение справедливо для задачи о назначениях из раздела 4.2.1. Однако в общем случае ЗЦЛП оказывается намного более трудной, чем ЗЛП[1].

5.2. Примеры задач целочисленного линейного программирования

Многие практические задачи могут быть сведены к ЗЦЛП. Некоторые примеры (задача с неделимостями из раздела 1.5.1, задача о назначениях из раздела 4.2.1) мы уже рассматривали. В этом разделе разберем другие примеры.

5.2.1. Задача о рюкзаке

Представим себе путешественника, который собирает в дорогу рюкзак. В его распоряжении n предметов. Пусть известны вес a_j и «ценность» c_j каждого предмета ($j = 1, 2, \ldots, n$). Требуется заполнить рюкзак, не превышая его грузоподъемности b и максимизируя суммарную ценность груза. Получаем следующую булеву ЗЦЛП (*задача о* $\{0, 1\}$*-рюкзаке*):

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b, \\ x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Предположим теперь, что каждый предмет имеется в неограниченном числе экземпляров, и требуется также максимизировать суммарную ценность груза, не превышая грузоподъемности. Получаем так называемую *задачу о целочисленном рюкзаке*:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b, \\ x_j \in \mathbf{Z} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{81}$$

[1]ЗЛП принадлежит классу P, тогда как ЗЦЛП является NP-трудной задачей. См. раздел 2.8 и замечание 5.7.

5.2.2. Задачи с фиксированными доплатами

В ЗЛП целевая функция представляет собой линейную форму:

$$f(x) = cx = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Часто, однако, встречаются практические задачи, в которых целевая функция имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ c_0 + cx, & \text{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

где c_0 — некоторая фиксированная величина. Например, стоимость перевозки товара может состоять из двух частей: первая фиксирована и не зависит от объема перевозимого товара, а вторая — зависит. Предположим, что на переменные наложено требование неотрицательности $x \geq 0$ и известна верхняя оценка $x \leq \widehat{x}$ на величину неизвестных. Тогда путем введения новой целочисленной переменной такую задачу можно свести к ЗЦЛП.

Действительно, пусть переменная y удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered} y \in \{0, 1\}, \\ y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0. \end{gathered} \tag{82}$$

Получаем

$$f(x) = c_0y + cx.$$

Условия (82) эквивалентны выполнению следующих дополнительных ограничений:

$$\begin{gathered} y \in \{0, 1\}, \\ x \leq y\widehat{x}. \end{gathered}$$

Упражнение 5.3. Сведите задачу с целевой функцией

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n), \quad \text{где} \quad f_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ c_{0j} + c_jx, & \text{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

к ЗЦЛП, путем введения n дополнительных целочисленных переменных.

5.2.3. Дихотомии

Пусть среди ограничений некоторой задачи математического программирования есть условия-*дихотомии* вида:

$$G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \quad \text{или} \quad G_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \tag{83}$$

где G_1, G_2 — некоторые функции. Предположим, что известны нижние границы g_1, g_2 для значений этих функций:

$$G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq g_1, \qquad G_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq g_2.$$

Тогда, введя новую целочисленную переменную y, удовлетворяющую условиям

$$y \in \{0, 1\},$$

сведем (83) к системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq g_1 \cdot y, \\ G_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq g_2 \cdot (1 - y). \end{cases}$$

Если остальные ограничения являются линейными, а также линейными являются функции G_1 и G_2, то полученнная задача является ЗЦЛП.

Упражнение 5.4. Покажите, как описанные в этом разделе прием можно распространить для сведения к ЗЦЛП оптимизационной задачи с ограничением в виде s альтернатив:

$$G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \quad \text{или} \quad \ldots \quad \text{или} \quad G_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0.$$

5.2.4. Задачи о выполнимости КНФ

Определение 5.5. *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) называется представление булевой функции f, зависящей от n булевых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1 \& f_2 \& \ldots \& f_m,$$

где f_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — так называемые *элементарные дизъюнкции*, т. е. формулы вида

$$x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_{r-1}} \vee \overline{x}_{i_r} \ldots \vee \overline{x}_{i_s}. \tag{84}$$

Хорошо известно, что любую булеву функцию можно задать с помощью КНФ.

Определение 5.6. *Задача о выполнимости* заключается в определении, существует ли булев вектор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которого определяемая заданной КНФ булева функция обращается в 1.

Покажем, что задачу о выполнимости можно свести к задаче о совместности условий некоторой ЗЦЛП. Действительно, с каждой элементарной дизъюнкцией (84) свяжем линейное неравенство

$$x_{i_1} + \ldots + x_{i_{r-1}} + (1 - x_{i_r}) + \ldots + (1 - x_{i_s}) \geq 1. \tag{85}$$

Легко видеть, что неравенство (85) выполнено тогда и только тогда, когда элементарная дизъюнкция (84) обращается в 1. Система ограничений ЗЦЛП состоит из неравенств вида (85) и требований

$$x_j \in \{0, 1\}\,.$$

Целевая функция может быть произвольной. Задача проверки совместности условий этой ЗЦЛП эквивалентна задаче о выполнимости.

Замечание 5.7. (Читателю, знакомому с теорией полиномиальной сводимости [3].) Рассмотренное сведе́ние задачи о выполнимости к ЗЦЛП (а точнее, к задаче булева линейного программирования) имеет большое теоретическое значение. Задача о выполнимости является классической NP-полной задачей. Рассуждения данного раздела показывают, что задача о совместности условий ЗЦЛП также является NP-полной задачей. Заметим, что NP-полной является задача о совместности ограничений задачи о 0,1-рюкзаке.

5.2.5. Задача о «раскрое»

Из некоторого материала требуется изготовить m различных изделий в количестве, пропорциональном числам $b_1, \dots, b_m$. Каждая единица материала может быть раскроена n различными способами, причем использование j-го способа дает a_{ij} единиц i-го изделия. Найти план раскроя a единиц материала, обеспечивающий максимальное число комплектов изделий.

Обозначим через x_j количество единиц материала, раскраиваемого j-ым способом. Переменные x_j должны удовлетворять, очевидно, следующим ограничениям:

$$\begin{cases} x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbf{Z}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = a, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i x \quad (i = 1, \ldots, m), \end{cases} \tag{86}$$

где x — число комплектов изделий.

Задача заключается в максимизации x при ограничениях (86).

5.2.6. Задача коммивояжера

Коммивояжер должен посетить n городов, не побывав ни в одном дважды, и в конце возвратиться в исходный город. Предположим, что известны все расстояния a_{ij} между любыми двумя городами i и j ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$). Каков должен быть маршрут коммивояжера, чтобы суммарное расстояние, пройденное им, было минимальным?

Известно несколько способов сведения этой задачи к ЗЦЛП. Рассмотрим способ, принадлежащий Таккеру.

Определим переменные x_{ij} следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер переезжает из города } i \text{ в город } j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{87}$$

Из каждого города коммивояжер должен выехать ровно один раз, поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{88}$$

В каждый город коммивояжер должен въехать ровно один раз, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{89}$$

Легко видеть, что этих условий недостаточно, чтобы описать допустимый маршрут коммивояжера (контур, или гамильтонов цикл). Например, две петли на рис. 5.1 не соответствуют возможному маршруту коммивоя-

Рис. 5.1.

жера, однако определяются условиями (87)–(89). Чтобы отбросить такие случаи, Таккер предложил ограничения (87)–(89) дополнить $n \cdot (n-1)$ неравенствами вида:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n;\ i \neq j), \tag{90}$$

где x_i — новые вещественные переменные.

Покажем, что если мы нашли решение, удовлетворяющее ограничениям (87)–(89), но не являющееся контуром, то нарушится по крайней мере одно из ограничений (90). В этом случае решение содержит не менее двух петель. Рассмотрим петлю, не проходящую через город с номером 1 и сложим все неравенства, отвечающие $x_{ij} = 1$, вдоль такой петли. Легко видеть, что в результате получим противоречие:

$$nk \leq (n-1)k,$$

где k — число дуг в петле.

Теперь покажем, что для любого допустимого маршрута найдутся такие x_i, удовлетворяюшие неравенствам (90). Положим

$$u_i = t, \quad \text{если город } i \text{ посещается на шаге } t, \quad (t = 1, \ldots, n).$$

При $x_{ij} = 0$ неравенство (90) превращается в верное неравенство $u_i - u_j \leq n - 1$, а при $x_{ij} = 1$ имеем $u_i - u_j + nx_{ij} = t - (t+1) + n = n - 1$.

Итак, задача коммивояжера состоит в минимизации функции $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}a_{ij}$ при ограничениях (87)–(90).

5.3. Идея метода правильных отсечений

Пусть $\widetilde{x}$ — оптимальное решение ЗЛП, полученной из ЗЦЛП отбрасыванием требования целочисленности. Очевидно, что значение максимизируемой функции на любом допустимом решении ЗЦЛП не превосходит значения этой функции на векторе $\widetilde{x}$. Следовательно, если $\widetilde{x}$ удовлетворяет условиям целочисленности, то он оптимальный и для ЗЦЛП. Однако так бывает далеко не всегда. Округление же компонент до ближайшего целого может не только не дать оптимального решения ЗЦЛП, но и вывести за пределы допустимых решений ЗЛП. Дж. Данциг, Д. Фалкерсон[2] и С. Джонсон[3] предложили в этом случае добавлять к условиям ЗЛП *правильное отсечение* — такое линейное неравенство, которому $\widetilde{x}$ не удовлетворяет (условие *отсечения*), а любой допустимый вектор ЗЦЛП удовлетворяет (условие «*правильности*»). После этого решается новая ЗЛП, строится новое отсечение и т. д., пока либо не получится оптимальное решение, удовлетворяющее условиям целочисленности, либо не будет выявлена несовместность условий получившейся ЗЛП.

Способ построения правильных отсечений, гарантирующий конечность описанной процедуры, был опубликован Р. Гомори[4] в 1958 г.

Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная $m \times n$ матрица, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^\top$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — целочисленные векторы. Рассмотрим ЗЦЛП в *стандартной форме*:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \in \mathbf{Z}, \quad x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \end{array}\right. \tag{91}$$

которую путем добавления слабых переменных $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ легко привести к *каноническому виду*:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m, \\ \quad x_j \in \mathbf{Z}, \quad x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n+m). \end{array}\right. \tag{92}$$

---

[2]Делберт Рэй Фалкерсон (1924–1976) — американский математик.

[3]Селмер М. Джонсон — американский математик.

[4]Ральф Гомори (род. 1929) — американский математик.

Выбирая переменные $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ в качестве базисных, для этой задачи мы можем записать столбцовую симплекс-таблицу:

$$T = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \hline 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right).$$

Так как оптимальное решение ЗЛП после правильного отсечения не является допустимым решением новой ЗЛП, но является ее двойственным допустимым решением, то для решения новой ЗЛП выгоднее использовать двойственный симплекс-метод (или применять прямой симплекс-метод для двойственной задачи). Кроме того, так как правильное отсечение является неравенством, то удобнее использовать столбцовую форму записи и считать, что ограничения исходной задачи заданы в форме неравенств.

5.4. Циклический алгоритм Гомори

Лемма 5.8 (Гомори). *Пусть*

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i(-x_i), \tag{93}$$

причем $x \in \mathbf{Z}$, $x_i \in \mathbf{Z}$, $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. *Тогда*

$$-\{a_0\} - \sum_{i=1}^{m} \{a_i\}(-x_i) \geq 0. \tag{94}$$

Доказательство. Так как $x \in \mathbf{Z}$ и

$$x = \lfloor a_0 \rfloor - \sum_{i=1}^{m} \lfloor a_i \rfloor x_i + \{a_0\} - \sum_{i=1}^{m} \{a_i\} x_i \geq 0,$$

то

$$y = -\{a_0\} + \sum_{i=1}^{m} \{a_i\}\, x_i \in \mathbf{Z}.$$

Так как $\{a_0\} < 1$, то $y > -1$ и, следовательно, $y \geq 0$, откуда и следует (94). ∎

Определение 5.9. Если $a_0 \notin \mathbf{Z}$, то неравенство (94) называется *отсечением Гомори*.

Чтобы использовать отсечение Гомори при решении ЗЦЛП удобно ввести новую неотрицательную переменную

$$x' = -\{a_0\} - \sum_{i=1}^{m} \{a_i\}\,(-x_i). \tag{95}$$

Очевидно, что условия $x' \geq 0$ и (95) эквивалентны нераВеству (94).

В качестве *производящего* неравенства (93) берется одно из неравенств, соответствующих какой-либо строке столбцовой симплекс-таблицы. Можно взять также нулевую строку, так как значение целевой функции x_0 выражается через переменные задачи линейно с целыми множителями. По той же причине в качестве производящей строки можно взять любую целочисленную комбинацию строк таблицы. Чтобы построенное неравенство не было тривиальным, т. е. выполнялось условие отсечения, необходимо $a_0 \notin \mathbf{Z}$.

Определение 5.10. Циклический алгоритм, в котором на каждом шаге строится отсечение Гомори, называется *циклическим алгоритмом Гомори*, или *первым алгоритмом Гомори*.

Пример 5.11. Решим циклическим алгоритмом Гомори ЗЦЛП:

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 & & \geq & 0, \\ & x_2 & \geq & 0, \\ -2x_1 & +3x_2 & \leq & 4, \\ 3x_1 & -2x_2 & \leq & 1, \\ x_1 & & \in & \mathbf{Z}, \\ & x_2 & \in & \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} -2x_1 \ +3x_2 \ +x_3 \qquad = \ 4, \\ \ \ 3x_1 \ -2x_2 \qquad +x_4 \ = \ 1, \\ \quad x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbf{Z} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

Запишем ограничения задачи в виде следующей столбцовой симплекс-таблицы, к которой применим прямой симплекс-метод:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & \boxed{3} & -2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1/3 & 1/3 & -5/3 \\ \hline 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 14/3 & 2/3 & \boxed{-5/3} \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 5 & 1 & 1 \\ \hline 11/5 & 3/5 & 2/5 \\ 14/5 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Из первой строки получаем

$$x_1 = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}(-x_4) + \frac{2}{5}(-x_3).$$

По формуле (94) строим отсечение Гомори:

$$x_5 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_3.$$

Здесь и далее производящая строка отмечена звездочкой. Припишем коэффициенты этого равенства снизу к таблице и применим двойственный симплекс-метод:

$$
\left(\begin{array}{c|cc}
5 & 1 & 1 \\
\hline
\tfrac{11}{5}^{*} & \tfrac{3}{5} & \tfrac{2}{5} \\
\tfrac{14}{5} & \tfrac{2}{5} & \tfrac{3}{5} \\
0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 0 \\
\hdashline
-\tfrac{1}{5} & \boxed{-\tfrac{3}{5}} & -\tfrac{2}{5}
\end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{c|cc}
\tfrac{14}{3} & \tfrac{5}{3} & \tfrac{1}{3} \\
\hline
2 & 1 & 0 \\
\tfrac{8}{3} & \tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \\
0 & 0 & -1 \\
\tfrac{1}{3} & -\tfrac{5}{3} & \tfrac{2}{3} \\
0 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

Из нулевой строки получаем

$$x_2 = \frac{14}{3} + \frac{5}{3}(-x_5) + \frac{1}{3}(-x_3).$$

По формуле (94) строим отсечение Гомори:

$$x_6 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_3.$$

Припишем коэффициенты этого равенства снизу к таблице и применим симплекс-метод:

$$
\left(\begin{array}{c|cc}
\tfrac{14}{3}^{*} & \tfrac{5}{3} & \tfrac{1}{3} \\
\hline
2 & 1 & 0 \\
\tfrac{8}{3} & \tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \\
0 & 0 & -1 \\
\tfrac{1}{3} & -\tfrac{5}{3} & \tfrac{2}{3} \\
0 & -1 & 0 \\
\hdashline
-\tfrac{2}{3} & -\tfrac{2}{3} & \boxed{-\tfrac{1}{3}}
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|cc}
4 & 1 & 1 \\
\hline
2 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 1 \\
2 & 2 & -1 \\
-1 & \boxed{-3} & 2 \\
0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|cc}
\tfrac{11}{3} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{5}{3} \\
\hline
\tfrac{5}{3} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} \\
2 & 0 & 1 \\
\tfrac{4}{3} & \tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \\
0 & -1 & 0 \\
\tfrac{1}{3} & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} \\
0 & 0 & -1
\end{array}\right)
\tag{96}
$$

Из нулевой строки получаем

$$x_0 = \frac{11}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{5}{3}x_6.$$

После введения отсечения

$$x_7 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_6$$

и выполнения одного шага симплекс-метода процесс закончится:

$$\left(\begin{array}{c|cc} {}^{11}\!/_3{}^{*} & {}^{1}\!/_3 & {}^{5}\!/_3 \\ \hline {}^{5}\!/_3 & {}^{1}\!/_3 & {}^{2}\!/_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ {}^{4}\!/_3 & {}^{2}\!/_3 & {}^{1}\!/_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ {}^{1}\!/_3 & -{}^{1}\!/_3 & -{}^{2}\!/_3 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hdashline -{}^{2}\!/_3 & \boxed{-{}^{1}\!/_3} & -{}^{2}\!/_3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Искомая оптимальная точка: $\widetilde{x} = (1, 2)^\top$.

Заметим, что задачу можно решить графически. На рисунке 5.11 светло-серым цветом закрашена область допустимых значений соответствующей ЗЛП. Серым цветом закрашена выпуклая оболочка всех целочисленных допустимых точек. Очевидно, что максимум функции $x_1 + x_2$ достигается в точке $(1, 2)^\top$. Заметим, что округление компонент решения $({}^{11}\!/_5\,, {}^{14}\!/_5)$ соответствующей ЗЛП приводит к точке $(2, 2)$, которая не является даже допустимой для исходной ЗЦЛП.

На рисунке 5.11 также отмечены решения промежуточных ЗЛП и изображены построенные в ходе решения отсечения:

$$x_5 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_3 = 2 - x_1 \geq 0,$$
$$x_6 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_3 = 2 - x_2 \geq 0,$$
$$x_7 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_6 = 1 - x_1 \geq 0.$$

x_2

$(2, 8/3)$ $(11/5, 14/5)$

$(2, 5/2)$

$(1, 2)$

$(5/3, 2)$ $x_2 = 2$

$(0, 4/3)$

$x_1 = 1$ $x_1 = 2$

x_1

$(0, 0)$

$(1/3, 0)$

Рис. 5.2.

Дадим пошаговое описание циклического алгоритма Гомори для ЗЦЛП (91).

Алгоритм 7. [Циклический алгоритм Гомори.]

Шаг 0. Решить ЗЛП, полученную из исходной задачи в результате отбрасывания требований целочисленности. Пусть $T = (t_{ij})$ — оптимальная столбцовая симплекс-таблица.

Шаг 1. Если $t_{i0} \in \mathbf{Z}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, то стоп. Оптимальный вектор найден. В противном случае выбрать такое r, что $t_{r0} \notin \mathbf{Z}$, $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Шаг 2. Приписать к таблице T снизу строку

$$\big(-\{t_{r0}\}\,,\ -\{t_{r1}\}\,,\ \ldots,\ -\{t_{r,n-m}\}\big)\,. \tag{97}$$

Шаг 3. Решить полученную ЗЛП двойственным симплекс-методом в столбцовой форме, начиная с текущей таблицы T. Если условия ЗЛП не совместны, то конец. Условия исходной ЗЦЛП также несовместны. В противном случае вернуться на шаг 1.

Определение 5.12. s-ая строка, выбираемая на шаге 1 алгоритма 7, называется *производящей* строкой.

Легко видеть, что строка (97), приписываемая к таблице T содержит коэффициенты отсечения (95), построенного по производящей строке.

Пример 5.13. Решим ЗЦЛП:

$$\max\{3x_1 + 2x_2\}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ 13x_1 - 2x_2 = 52, \\ x_1 + 2x_2 = 11, \\ -x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & -3 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 52 & \boxed{13} & -2 \\ 11 & 1 & 2 \\ 16 & -1 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|cc} 12 & 3/13 & -32/13 \\ \hline 4 & 1/13 & -2/13 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & -1/13 & \boxed{28/13} \\ 20 & 1/13 & 50/13 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{c|cc}
20 & 1/7 & 8/7 \\ \hline
9/2 & 1/14 & 1/14 \\
13/4 & -1/28 & 13/28 \\
0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 \\
15/2 & 3/14 & -25/14 \\ \hdashline
-1/2 & -1/14 & -1/14
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|cc}
19 & 2 & 1 \\ \hline
4 & 1 & 0 \\
7/2 & -1/2 & 1/2 \\
7 & -14 & 1 \\
0 & 0 & -1 \\
6 & 3 & -2 \\
0 & -1 & 0 \\ \hdashline
-1/2 & \boxed{-1/2} & -1/2
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|cc}
18 & 1 & 2 \\ \hline
4 & 1 & 0 \\
3 & -1 & 1 \\
6 & -15 & 2 \\
1 & 1 & -2 \\
8 & 5 & -4 \\
0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1
\end{array}\right)
$$

Получили оптимальный вектор $\widehat{x} = (4,3)^\top$. В процессе решения были построены отсечения

$$
\begin{aligned}
x_6 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{14}x_3 + \frac{1}{14}x_4 = 4 - x_1 \geq 0, \\
x_7 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4 = 7 - x_1 - x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Графическая иллюстрация процесса решения приведена на рис. 5.3.

Следующее простое правило выбора номера r производящей строки гарантирует конечность алгоритма.

γ_1 Выбрать r по правилу:

$$r = \min\{i : \ t_{i0} \notin \mathbf{Z} \quad (i = 0, 1, \ldots, n)\}.$$

Теорема 5.14. *Пусть к ЗЦЛП* (91) *применяется алгоритм 7, причем*

1) *выполнено по крайней мере одно из условий:*

   а) *множество допустимых целочисленных векторов ЗЦЛП* (91) *не пусто или*

   б) *множество допустимых векторов соответствующей ЗЛП ограничено;*

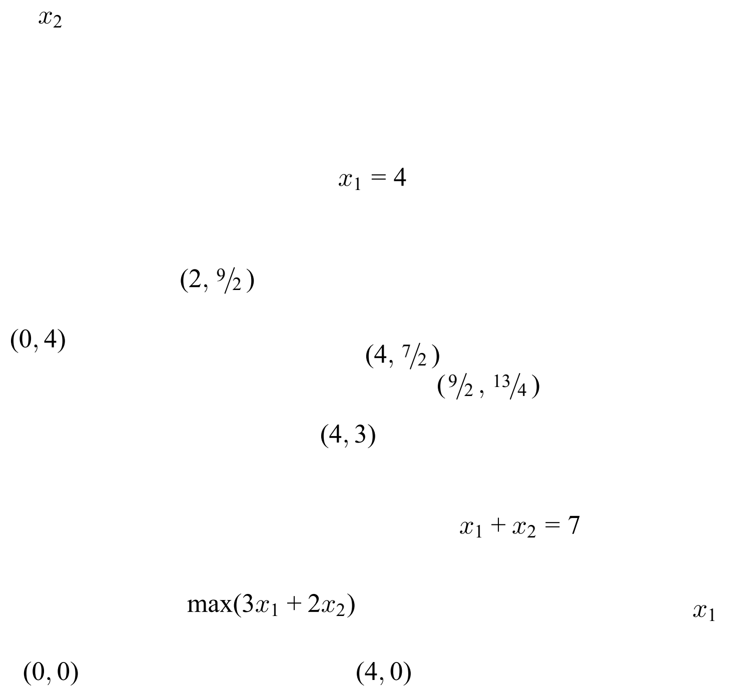

Рис. 5.3.

2) *на шаге 0 алгоритма 7 найдена лексикографически допустимая таблица T;*

3) *для выбора номера производящей строки используется правило γ_1;*

4) *на шаге 3 используется лексикографический двойственный симплекс-метод в столбцовой форме.*

Тогда за конечное число шагов алгоритм находит решение ЗЦЛП или доказывает несовместность ее условий.

Доказательство. Легко показать, что в процессе работы циклического алгоритма Гомори все столбцы, кроме, быть может, нулевого, лексикографически положительны, кроме того, нулевой столбец симплекс-таблицы лексикографически монотонно убывает (ср. упражнение 3.52).

Предположим, что вычислительный процесс бесконечен. Так как на шаге 3 используется конечная модификация симплекс-метода (лексикографическая), то бесконечность процесса может стать возможной только из-за того, что генерируется бесконечное число отсечений.

Пусть на некоторой итерации шага 1 алгоритма имеем $t_{00} \notin \mathbf{Z}$. Тогда по правилу γ_1 нулевая строка становится производящей. К таблице T необходимо приписать строку $\big(-\{t_{00}\}\,,\ -\{t_{01}\}\,,\ \ldots\,,\ -\{t_{0,n-m}\}\big)$, которая становится направляющей. Пусть s — номер направляющего столбца. Тогда $\{t_{0s}\} > 0$, откуда $t_{0s} \notin \mathbf{Z}$. Легко видеть, что в результате итерации симплекс-метода с направляющим элементом $-\{t_{0s}\}$ элемент t_{00} будет заменен элементом

$$t'_{00} = t_{00} - \frac{t_{0s}}{\{t_{0s}\}}\,\{t_{00}\} \le t_{00} - \{t_{00}\} = \lfloor t_{00} \rfloor\,. \tag{98}$$

Неравенство в (98) следует из соотношений $t_{0s} > 0$ (так как таблица двойственно допустима) и $t_{0s}/\{t_{0s}\} \ge 1$. Неравенство $t'_{00} \le \lfloor t_{00} \rfloor$ показывает, что элемент t_{00} уменьшается по крайней мере до ближайшего целого. Поэтому если выполнено условие 1а), то так как процесс бесконечен, то на некоторой итерации элемент t_{00} принимает целое значение и далее не изменяется. Если выполнено условие 1б), то либо шаг 3 обнаруживает несовместность условий, либо элемент t_{00} принимает целое значение и далее не изменяется.

Предположим что элемент t_{00} принял целое значение и далее не изменяется, и $t_{10} \notin \mathbf{Z}$. Тогда первая строка симплекс-таблицы — производящая. К таблице T необходимо приписать строку

$$\big(-\{t_{10}\}\,,\ -\{t_{11}\}\,,\ \ldots\,,\ -\{t_{1,n-m}\}\big)\,,$$

которую выбираем в качестве направляющей. Пусть s — номер направляющего столбца. После одной итерации симплекс-метода элемент t_{10} будет заменен элементом

$$t'_{10} = t_{10} - \frac{t_{1s}}{\{t_{1s}\}}\,\{t_{10}\}\,. \tag{99}$$

Покажем, что $t_{1s} > 0$. Действительно, $t_{1s} \ne 0$, так как иначе элемент $-\{t_{1s}\} \ne 0$ не мог быть направляющим. Далее, $t_{1s} \ge 0$, так как иначе $t_{0s} > 0$ (ввиду того, что s-ый столбец лексикографически положителен) и после итерации симплекс-метода элемент t_{00} изменился бы. Итак $t_{1s} > 0$, поэтому из (99) получаем, что $t'_{10} \le \lfloor t_{10} \rfloor$. Но переменная x_0 ограничена по знаку. Так как процесс бесконечен и нулевой столбец лексикографически уменьшается, то на некоторой итерации элемент t_{10} примет целочисленное значение и далее изменяться не будет. Если выполнено условие 1б), то возможно также, что шаг 3 обнаружит несовместность условий задачи.

Проводя аналогичные рассуждения для всех элементов нулевого столбца симплекс-таблицы (можно провести индукцию), придем к заключению, что через конечное число шагов все элементы нулевого столбца станут целыми неотрицательными, либо будет обнаружена несовместность условий ЗЦЛП. На этом алгоритм завершит свою работу. ∎

Замечание 5.15. После того, как в циклическом алгоритме Гомори к таблице приписывается строка с коэффициентами правильного отсечения, переменная, соответствующая этой строке, становится базисной. После этого к таблице применяется двойственный симплекс-метод, на первой итерации которого новая строка является направляющей. В результате новая переменная исключается из базы.

Предположим, что на некоторой итерации циклического алгоритма Гомори переменная, соответствующая одному из отсечений, повторно была введена в базу, причем соответствующий ей элемент нулевого столбца симплекс-таблицы неотрицателен. Тогда соответствующую этой переменной строку можно вычеркнуть из таблицы, продолжая действовать согласно описанию алгоритма. Легко видеть, что такой вариант циклического алгоритма Гомори также конечен, хотя и, возможно, более медлителен. Доказательство теоремы 5.14 распространяется и на этот случай.

Пример 5.16. В примере 5.11 из последней симплекс-таблицы в (96) и всех последующих таблиц может быть вычеркнута пятая строка, соответствующая отсечению $x_1 \le 2$. В данном примере это не приведет к увеличению числа итераций.

5.5. Полностью целочисленный алгоритм

При программной реализации алгоритмов линейного программирования одной из возникающих проблем является накопление ошибок округления. В целочисленном программировании эта неприятность усугубляется возможностью неправильного определения дробной части числа, если для представления элементов симплекс-таблиц использовать числа с плавающей запятой. Другой альтернативой является представление этих элементов в виде отношения двух целых чисел. Однако в этом случае неизбежно приходится преодолевать трудности, связанные с их ростом, поскольку числа перестают убираться в отводимые для них ячейки памяти. Необходимость преодоления этих трудностей способствовала появлению полностью целочисленных процессов.

Пусть симплекс-таблица T, соответствующая некоторой базе задачи (92), двойственно допустима и целочисленна, т. е.

$$t_{ij} \in \mathbf{Z} \quad (i = 0, 1, \ldots, m+n;\ j = 0, 1, \ldots, n), \quad t_{0j} \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Если при этом $t_{i0} \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m+n$), то T — оптимальная симплекс-таблица.

В противном случае пусть t_{rs} — направляющий элемент, выбранный по правилам двойственного симплекс-метода. Если $t_{rs} = -1$, то, выполнив один шаг преобразований симплекс-метода, мы снова приходим к двойственно допустимой целочисленной таблице.

Идея полностью целочисленного алгоритма состоит в формировании отсечения, которое приводит к появлению направляющего элемента, равного -1.

Лемма 5.17. *Пусть*

$$x = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j(-x_j), \tag{100}$$

причем $x \in \mathbf{Z}$, $x \geq 0$, $x_j \in \mathbf{Z}$, $x_j \geq 0$, $a_0 \in \mathbf{Z}$, $a_j \in \mathbf{Z}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Тогда для любого λ, такого, что $\lambda \geq 1$, $\lambda \in \mathbf{Z}$, справедливо неравенство

$$\left\lfloor \frac{a_0}{\lambda} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{m} \left\lfloor \frac{a_j}{\lambda} \right\rfloor (-x_j) \geq 0. \tag{101}$$

Доказательство. Из (100) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq a_0,$$

поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda} x_j \leq \frac{a_0}{\lambda}.$$

Вычитая из последнего соотношения неравенства

$$\left\{\frac{a_j}{\lambda}\right\} x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

получим

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{\lambda} - \left\{\frac{a_j}{\lambda}\right\}\right) x_j \leq \frac{a_0}{\lambda},$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^{m} \left\lfloor \frac{a_j}{\lambda} \right\rfloor x_j \leq \frac{a_0}{\lambda}.$$

Левая часть полученного неравенства целочисленна, поэтому не превосходит $\left\lfloor \dfrac{a_0}{\lambda} \right\rfloor$, что и требовалось. ∎

Пусть r — направляющая строка двойственно-допустимой таблицы T, соответствующей перестановке номеров небазисных переменных $\mathscr{N} = \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle$. Тогда

$$x_r = t_{r0} + \sum_{j=1}^{n} t_{rj}(-x_{k_j}).$$

Положим $\lambda = \max\left\{|t_{rj}| : \ t_{rj} < 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)\right\}$,

$$x_{m+n+1} = \left\lfloor \frac{t_{r0}}{\lambda} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{t_{rj}}{\lambda} \right\rfloor (-x_{k_j}). \tag{102}$$

По лемме 5.17 неравенство $x_{m+n+1} \geq 0$ является правильным отсечением. Припишем коэффициенты этого неравенства в конец таблицы.

Так как $t_{r0} < 0$, то $\lfloor t_{r0}/\lambda \rfloor < 0$ и, следовательно, новую строку можно взять за направляющую. Направляющий столбец s выберем согласно правилу двойственного симплекс-метода. Очевидно, что $t_{m+n+1,s} = -1$. После выполнения одного шага симплекс-метода с этим направляющим элементом вычеркнем новую строку (это можно сделать, несмотря на то, что соответствующая этой строке переменная не является базисной) и повторим описанные операции.

Приведенный алгоритм называется *полностью целочисленным алгоритмом*, или *третьим алгоритмом Гомори*. Дадим его пошаговое описание.

Алгоритм 8. [Полностью целочисленный алгоритм Гомори.]

Шаг 0. Начать с двойственно допустимой целочисленной столбцовой симплекс-таблицы $T = (t_{ij})$, записанной для задачи (92).

Шаг 1. Если $t_{i0} \geq 0$ ($i = 0, 1, \ldots, m + n$), то стоп. Оптимальный вектор найден. В противном случае выбрать такое r, что $t_{r0} < 0$, $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть

$$\lambda = \max\left\{|t_{rj}| : \ t_{rj} < 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)\right\}. \qquad (103)$$

Шаг 2. Приписать к таблице T снизу строку

$$\left(\left\lfloor\frac{t_{r0}}{\lambda}\right\rfloor, \ \left\lfloor\frac{t_{r1}}{\lambda}\right\rfloor, \ \ldots, \ \left\lfloor\frac{t_{rn}}{\lambda}\right\rfloor\right)$$

(если $\lambda = 1$, то новая строка совпадает с r-ой).

Шаг 3. Если $t_{n+1,j} \leq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), конец. Условия задачи несовместны. Иначе выбрать такое s, что

$$\frac{t_{0s}}{|t_{m+n+1,s}|} = \min\left\{\frac{t_{0j}}{|t_{m+n+1,j}|} : \quad t_{m+n+1,j} < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\right\}.$$

(Заметим, что $t_{m+n+1,s} = -1$).

Шаг 4. (Шаг гауссова преобразования.) Для каждого $j \in \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{s\}$ прибавить к j-му столбцу s-ый, умноженный на $t_{m+n+1,j}$.

Теорема 5.18 (Гомори). *Пусть к задаче* (91) *применяется алгоритм* 8, *причем*

1) *множество допустимых целочисленных векторов ЗЦЛП* (91) *непусто,*

2) *на шаге* 0 *построена лексикографически допустимая столбцовая симплекс-таблица,*

3) *на шаге* 1 *номер* r *производящей строки выбирается по правилу* $r = \min\{i : \ t_{i0} < 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$,

4) *на шаге* 3 *для выбора номера направляющего столбца* s *используется правило лексикографического двойственного симплекс-метода.*

Тогда алгоритм 8 *заканчивает свою работу за конечное число шагов.*

Доказательство. Предположим, что вычислительный процесс бесконечен. Так как на шаге 3 используется конечная модификация симплекс-метода (лексикографическая), то бесконечность процесса может стать возможной только из-за того, что генерируется бесконечное число отсечений.

Ввиду условия 4), нулевой столбец таблицы монотонно лексикографически уменьшается. Если элемент t_{00} уменьшается, то, в силу целочисленности таблицы, он уменьшается на целую величину. Так как процесс бесконечен, то, ввиду условия 1), начиная с некоторой итерации элемент t_{00} не изменяется.

Рассмотрим тогда элемент t_{10}. Так как процесс бесконечен, а нулевой столбец лексикографически уменьшается, то на некоторой итерации получим $t_{10} < 0$. Тогда первая строка симплекс-таблицы становится производящей. К таблице T необходимо приписать строку

$$\left(\left\lfloor\frac{t_{10}}{\lambda}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{t_{11}}{\lambda}\right\rfloor, \ldots, \left\lfloor\frac{t_{1n}}{\lambda}\right\rfloor\right)$$

и выполнить один шаг лексикографического симплекс-метода с направляющим элементом $t_{m+n+1,s} = -1$. Легко видеть, что в результате этого шага элемент t_{10} будет заменен элементом

$$t'_{10} = t_{10} + \left\lfloor\frac{t_{10}}{\lambda}\right\rfloor \cdot t_{1s} > t_{10}. \tag{104}$$

Неравенство в (104) выполнено, так как $\lfloor t_{10}/\lambda \rfloor < 0$ и $t_{1s} < 0$. Итак, $t'_{10} > t_{10}$, что невозможно, так как нулевой столбец лексикографически убывает. Поэтому на некоторой итерации элемент t_{10} принимает положительное значение и далее не изменяется.

Проводя аналогичные рассуждения для всех элементов нулевого столбца симплекс-таблицы (можно провести индукцию), придем к заключению, что через конечное число шагов все элементы нулевого столбца станут неотрицательными. На этом алгоритм завершит свою работу. ∎

Более тонкое правило выбора λ можно посмотреть в [8].

Пример 5.19. Решим полностью целочисленным алгоритмом ЗЦЛП

$$\min(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + 2x_4 \ \le \ -1, \\ \ \ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \ \le \ -2, \\ x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbf{Z} \quad (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Запишем ограничения задачи в виде таблицы. Отсечение строим по пятой строке, выбирая λ по формуле (103). Имеем $\lambda = \max\{1, 2\} = 2$. Здесь и далее элемент производящей строки, на котором достигается максимум в (103), отмечен звездочкой. Коэффициенты отсечения припишем в конец таблицы и выполним один шаг двойственного симплекс-метода. Далее отсечение построим по шестой строке, выбирая $\lambda = \max\{2, 3\} = 3$.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2^* & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ \hdashline -1 & \boxed{-1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 2 & -3^* \\ \hdashline -1 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Выполнив один шаг двойственного симплекс-метода получим новую таблицу. Построим отсечение по пятой строке, выбирая $\lambda = 1$ и выполним один шаг преобразования симплекс-метода. В полученной таблице построим отсечение по шестой строке, снова выбирая $\lambda = 1$.

$$
\left(\begin{array}{c|cccc}
-2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1^* & 1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\
\hdashline
-1 & -1 & 1 & \boxed{-1} & 0
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|cccc}
-2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-3 & -1^* & 0 & 2 & -1 \\
\hdashline
-3 & \boxed{-1} & 0 & 2 & -1
\end{array}\right)
$$

Проводя один шаг симплекс-метода получим новую таблицу. Построим отсечение по третьей строке, выбирая $\lambda = 1$ и выполним один шаг преобразования симплекс-метода. В полученной таблице построим отсечение по второй строке, выбирая $\lambda = 2$.

$$
\left(\begin{array}{c|cccc}
-5 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
\hline
6 & -2 & 1 & -3 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
-2 & 1 & -1^* & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
-2 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-1}
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|cccc}
-5 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
\hline
4 & -1 & 0 & -2 & 1 \\
-1 & 1 & -2^* & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
-1 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Проводя один шаг симплекс-метода, получаем оптимальную таблицу и оптимальное целочисленное решение $\widetilde{x} = (4, 1, 0, 1)^\top$:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} -6 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 4 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

5.6. Прямой метод целочисленного программирования

Опишем идею так называемого *прямого алгоритма* целочисленного линейного программирования, предложенного Р. Д. Юнгом и Ф. Гловером.

Пусть $T = (t_{ij})$ — прямо допустимая целочисленная симплекс-таблица. Если $t_{0i} \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то задача (91) решена. В противном случае найдется такое s, что $t_{0s} < 0$. Если при этом $t_{js} \leq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m + n)$, то целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых векторов задачи (91). В противном случае найдем направляющий элемент t_{rs} по правилам прямого симплекс-метода. Если $t_{rs} = 1$, то после шага симплекс-метода ситуация повторяется. Если $t_{rs} \geq 2$, то положим $\lambda = q_{rs}$ и добавим отсечение

$$x_{m+n+1} = \left\lfloor \frac{t_{r0}}{\lambda} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{t_{rj}}{\lambda} \right\rfloor (-x_{k_j}).$$

Заметим, что существуют задачи, в которых описанная процедура приводит к бесконечному процессу. Для получения конечной модификации производящую строку выбирают более сложным образом (см. [8]).

Пример 5.20. Решение ЗЦЛП из примера 5.11 прямым методом приводит к последовательности таблиц:

$$
\left(\begin{array}{r|rr}
0 & -1 & -1 \\ \hline
0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 \\
4 & -2 & 3 \\
1 & \boxed{3} & -2 \\ \hdashline
0 & \boxed{1} & -1
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{r|rr}
0 & 1 & -2 \\ \hline
0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -1 \\
4 & 2 & 1 \\
1 & -3 & \boxed{1} \\
0 & -1 & 0
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{r|rr}
2 & -5 & 2 \\ \hline
1 & -2 & 1 \\
1 & -3 & 1 \\
3 & \boxed{5} & -1 \\
0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 0 \\ \hdashline
0 & \boxed{1} & -1
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{r|rr}
2 & 5 & -3 \\ \hline
1 & 2 & -1 \\
1 & 3 & -2 \\
3 & -5 & \boxed{4} \\
0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & -1 \\
0 & -1 & 0 \\ \hdashline
0 & -2 & \boxed{1}
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{r|rr}
2 & -1 & 3 \\ \hline
1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 2 \\
3 & \boxed{3} & -4 \\
0 & -2 & 1 \\
0 & -1 & 1 \\
0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 \\ \hdashline
1 & \boxed{1} & -2
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{r|rr}
3 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 0 \\
0 & -3 & 2 \\
2 & 2 & -3 \\
1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -2 \\
0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

5.7. Задача о рюкзаке. Динамическое программирование

В данном разделе мы опишем алгоритм решения задачи о рюкзаке (81), основанный на методе, называемом *динамическим программированием*. Пусть коэффициенты в (81) удовлетворяют соотношениям:

$$c_j > 0,\ a_j > 0,\ b > 0, \quad c_j \in \mathbf{Z},\ a_j \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{Z}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Легко видеть, что тогда множество допустимых векторов задачи ограничено и не пусто ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$).

Для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $y \in \{1, 2, \ldots, b\}$ рассмотрим вспомогательную задачу о рюкзаке

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k)$$
$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k \le y, \\ x_j \in \mathbf{Z} \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \end{cases} \tag{105}$$

оптимальное значение целевой функции которой обозначим $f_k(y)$. Заметим, что $f_n(b)$ равно искомому оптимальному значению целевой функции исходной задачи (81). Ниже мы получим рекуррентные соотношения, выражающие значение функции $f_k(y)$ через ее значения при меньших k и y. На основе этих соотношений можно организовать процесс, позволяющий для всех k и y найти $f_k(y)$, в том числе $f_n(b)$. В этом заключается основная идея метода.

Рассмотрим задачу (105) при $k = 1$. В ней требуется разместить в рюкзак грузоподъемности y максимальное число предметов первого типа. Очевидно, что

$$f_1(y) = c_1 \cdot \lfloor y/a_1 \rfloor \quad (y = 1, 2, \ldots, b). \tag{106}$$

Рассмотрим теперь задачу (105) при $k > 1$. Требуется разместить в рюкзак предметы первых k типов, так, чтобы суммарная ценность груза была бы максимальна. Предположим, что рюкзак заполнен оптимально.

Если в рюкзаке нет ни одного предмета k-го типа, то он заполнен только предметами типов $1, 2, \ldots, k-1$. Так как заполнение оптимально, то значение целевой функции (суммарная ценность) в этом случае равна $f_k(y) = f_{k-1}(y)$.

Если в рюкзаке предмет k-го типа находится только в одном экземпляре, то оставшееся место $y - a_k$ должно быть заполнено оптимальным образом предметами типов $1, 2, \ldots, k - 1$. В этом случае $f_k(y) = f_{k-1}(y - a_k) + c_k$.

Если в рюкзаке два предмета k-го типа, то под остальные предметы остается место равное $y - 2a_k$. Так как заполнение оптимально, то $f_k(y) = f_{k-1}(y - 2a_k) + 2c_k$.

Эти рассуждения можно провести далее, рассмотрев случаи с тремя, четырьмя и т. д. предметами k-го типа, находящимися в рюкзаке, вплоть до случая, когда в рюкзаке находится максимально возможное число $\lfloor y/a_k \rfloor$ предметов k-го типа. Оставшееся место $y - a_k \cdot \lfloor y/a_k \rfloor$ должно быть заполнено оптимальным образом предметами первых $(k-1)$ типов. Получаем $f_k(y) = f_{k-1}(y - a_k \cdot \lfloor y/a_k \rfloor) + c_k \cdot \lfloor y/a_k \rfloor$.

Подводя итог вышесказанному, можно сделать вывод, что

$$f_k(y) = \max\{f_{k-1}(y),\ f_{k-1}(y-a_k)+c_k,\ f_{k-1}(y-2a_k)+2c_k,\ \ldots \\ \ldots,\ f_{k-1}(y - a_k \cdot \lfloor y/a_k \rfloor) + c_k \cdot \lfloor y/a_k \rfloor\}. \tag{107}$$

Упростим рекуррентное соотношение (107). Для этого вначале вместо y в него подставим $y - a_k$. Получим

$$f_k(y-a_k) = \max\{f_{k-1}(y-a_k), \ldots, f_{k-1}(y-a_k \cdot \lfloor y/a_k \rfloor)+c_k \cdot \lfloor y/a_k \rfloor - c_k\}.$$

Теперь ясно, что в соотношении (107) все элементы, среди которых ищется максимальный, кроме первого, можно заменить на $f_k(y-a_k)+c_k$, т. е.

$$f_k(y) = \max\{f_{k-1}(y),\ f_k(y-a_k)+c_k\}\ (k = 2, \ldots, n;\ y = a_k+1, \ldots, b). \tag{108}$$

Вычисления проводятся по формулам (106) и (108) (при $y < 0$ положим $f_k(y) = -\infty$). Удобно использовать таблицу F размера $n \times b$. В k-ой строке и y-ом столбце этой таблицы записывается значение $f_k(y)$. Таблица заполняется по строкам сверху вниз, в каждой строке слева направо. Заметим, что для вычисления $f_k(y)$ достаточно знать $f_{k-1}(y)$ и $f_k(y-a_k)$. Это позволяет хранить только одну строку таблицы F.

Для того, чтобы кроме оптимального значения целевой функции найти компоненты решения, используют другую таблицу I. Таблица I также имеет размеры $n \times b$ и заполняется следующим образом. В k-ой строке и y-ом столбце этой таблицы записывается максимальной номер $i(k, y)$ ненулевой компоненты оптимального вектора задачи (105), т. е.

$$\begin{aligned} y(1,y) &= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad f_1(y) = 0, \\ 1, & \text{если} \quad f_1(y) \neq 0. \end{cases} \\ y(k,y) &= \begin{cases} i(k-1,y), & \text{если} \quad f_{k-1}(y) > f_k(y-a_k)+c_k, \\ k, & \text{если} \quad f_{k-1}(y) \le f_k(y-a_k)+c_k. \end{cases} \end{aligned} \tag{109}$$

Пример 5.21. Решим задачу

$$\max(8x_1 + 5x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 13, \\ x_j \in \mathbf{Z}, \quad x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, 3); \end{cases} \tag{110}$$

методом динамического программирования.

По формулам (106) и (108) вычислим элементы таблицы F:

$F =$

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f_1(y)$	0	0	8	8	8	16	16	16	24	24	24	32	32
$f_2(y)$	0	5	8	10	13	16	18	21	24	26	29	32	34
$f_3(y)$	1	5	8	10	13	16	18	21	24	26	29	32	34

Оптимальное значение целевой функции ЗЦЛП (110) равно $f_3(13) = 34$. По формулам (109) вычислим:

$I =$

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f_1(y)$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_2(y)$	0	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2
$f_3(y)$	3	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2

Для восстановления компонент решения в таблице I найдем

$$\begin{aligned} &i(3,13) && = 2, \\ &i(3,13 - a_2) = i(3,11) && = 2, \\ &i(3,11 - a_2) = i(3,\ 9) && = 1, \\ &i(3,\ 9 - a_1) = i(3,\ 6) && = 1, \\ &i(3,\ 6 - a_1) = i(3,\ 6) && = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальный вектор имеет компоненты $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.

Упражнение 5.22. Докажите, что описанный алгоритм динамического программирования для задачи о рюкзаке использует $O(nb)$ арифметических операций и $O(b)$ ячеек памяти.

5.8. Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ является, по-видимому, наиболее общим методом решения задач комбинаторной оптимизации. В данном разделе мы опишем один из основанных на этом методе алгоритмов для решения задач целочисленного линейного программирования.

Рассмотрим задачу линейного программирования P и соответствующую ей задачу целочисленного линейного программирования $P^{\mathbf{Z}}$:

$$P: \quad \begin{array}{c} \max cx \\ Ax \le b, \end{array} \qquad P^{\mathbf{Z}}: \quad \begin{array}{c} \max cx \\ \begin{cases} Ax \le b, \\ x \in \mathbf{Z}^n. \end{cases} \end{array}$$

Если все компоненты оптимального вектора $\widetilde{x}$ задачи P целочисленны, то x является решением задачи $P^{\mathbf{Z}}$. В противном случае выберем какую-нибудь нецелую компоненту $\widetilde{x}_i$ вектора $\widetilde{x}$ и рассмотрим две задачи:

$$P_0: \quad \begin{array}{c} \max cx \\ \begin{cases} Ax \le b, \\ x_i \le \lfloor \widetilde{x}_i \rfloor, \end{cases} \end{array} \qquad P_1: \quad \begin{array}{c} \max cx \\ \begin{cases} Ax \le b, \\ x_i \ge \lceil \widetilde{x}_i \rceil. \end{cases} \end{array}$$

Очевидно, что для того, чтобы решить $P^{\mathbf{Z}}$, достаточно решить каждую из задач $P_0^{\mathbf{Z}}$ и $P_1^{\mathbf{Z}}$ и выбрать среди их решений то, на котором значение целевой функции больше. Если условия каждой из задач $P_0^{\mathbf{Z}}$ и $P_1^{\mathbf{Z}}$ несовместны, то также несовместными будут и условия задачи $P^{\mathbf{Z}}$.

К задачам $P_0^{\mathbf{Z}}$, $P_1^{\mathbf{Z}}$ можно применить те же рассуждения, что и к задаче $P^{\mathbf{Z}}$. А именно, отбросим требование целочисленности задачи $P_0^{\mathbf{Z}}$. Решим полученную задачу P_0. Если все компоненты оптимального вектора $\widehat{x}$ задачи P_0 целочисленны, то x является решением задачи $P_0^{\mathbf{Z}}$. В противном случае выберем какую-нибудь нецелую компоненту $\widehat{x}_j$ вектора $\widehat{x}$ и рассмотрим две задачи:

$$P_{00}: \quad \begin{array}{c} \max cx \\ \begin{cases} Ax \le b, \\ x_i \le \lfloor \widetilde{x}_i \rfloor, \\ x_j \le \lfloor \widehat{x}_i \rfloor, \end{cases} \end{array} \qquad P_{01}: \quad \begin{array}{c} \max cx \\ \begin{cases} Ax \le b, \\ x_i \le \lfloor \widetilde{x}_i \rfloor, \\ x_i \ge \lceil \widehat{x}_j \rceil. \end{cases} \end{array}$$

Для того, чтобы решить $P_0^{\mathbf{Z}}$, достаточно решить каждую из задач $P_{00}^{\mathbf{Z}}$ и $P_{01}^{\mathbf{Z}}$ и выбрать среди их решений то, на котором значение целевой функции больше. Аналогичные рассуждения можно провести и с задачей $P_1^{\mathbf{Z}}$ и т. д.

Описанный процесс можно описать в виде корневого бинарного дерева. Корню этого дерева соответсвует ЗЛП P. Если какой-либо вершине соответствует ЗЛП P' с нецелочисленным оптимальным вектором $\overline{x}$, то ее потомкам (дочерним вершинам) соответствуют задачи P_0' и P_1', полученные из P' приписыванием к ограничениям дополнительных неравенств $x_i \leq \lfloor \overline{x}_i \rfloor$, $x_i \geq \lceil \overline{x}_i \rceil$ соответственно, где $\overline{x}_i$ — какая-либо дробная компонента вектора $\overline{x}$. Вершина является листом, если соответствующая ей задача имеет целочисленное решение, либо условия задачи несовместны.

Алгоритм строит описанное дерево, в каждой вершине решая соответсвующую ЗЛП до тех пор, пока дерево не будет построено полностью (далее, однако, мы покажем, что дерево иногда не обязательно строить до конца). Среди всех оптимальных значений целевой функции для задач, соответствующих листьям этого дерева, нужно выбрать максимальное. Это значение является оптимальным значением целевой функции для исходной задачи $P^{\mathbf{Z}}$, а соответсвующий ему вектор — ее решением.

Построение задач P_0' и P_1' из ЗЛП P называется *ветвлением*. Другой принцип, на котором основан метод ветвей и границ, называется *оцениванием*. Он позволяет, как правило, еще больше сократить объем вычислений.

Прежде чем описать этот принцип, сделаем два замечания.

1) Оптимальное значение целевой функции ЗЛП, соответствующей некоторой (любой) вершине графа является *верхней* оценкой оптимального значения функции любой дочерней ЗЛП.

2) Оптимальное значение целевой функции ЗЛП с целочисленным оптимальным вектором (т. е. соответствующей листу дерева), является *нижней* оценкой оптимального значения целевой функции исходной задачи $P^{\mathbf{Z}}$.

Эти два простых замечания позволяют на некотором шаге отсекать ветви, не доходя до корня дерева. Наибольшее из значений оптимумов решенных ЗЛП с целочисленными оптимальными векторами (т. е. соответсвующих построенным листьям) назовем *рекордом*. Согласно замечанию 2) рекорд не превосходит оптимального значения функции задачи $P^{\mathbf{Z}}$. Предположим, что ℓ — текущее значение рекорда, мы находимся в некоторой вершине дерева и $\widetilde{x}_0$ — оптимальное значение целевой функции задачи, соответсвующей этой вершине. Если $\widetilde{x}_0 < \ell$, то ветвление на текущей вершине не производится.

Дадим теперь пошаговое описание алгоритма, решающего задачу $P^{\mathbf{Z}}$ методом ветвей и границ.

Алгоритм 9. [Метод ветвей и границ для ЗЦЛП]

Шаг 0. Положить $\mathscr{P} = \{P\}$, $\ell = -\infty$.

Шаг 1. Если $\mathscr{P} = \emptyset$, то конец: если $\ell = -\infty$, то условия задачи $P^{\mathbf{Z}}$ несовместны; если $\ell \neq -\infty$, то $\widehat{x}$ — оптимальный вектор, а ℓ — оптимальное значение целевой функции.

Шаг 2. Выбрать из $\mathscr{P}$ задачу P' и решить ее. Удалить P' из $\mathscr{P}$.

Шаг 3. (Находимся в листе?) Если условия задачи P' совместны и $\widetilde{x}$ — ее решение, а $\widetilde{x}_0$ — оптимальное значение функции, причем $\widetilde{x}$ — целочислен и $\widetilde{x}_0 > \ell$, то в качестве ℓ взять $\widetilde{x}_0$, а в качестве $\widehat{x}$ взять $\widetilde{x}$.

Шаг 4. (Ветвление) Если $\widetilde{x}$ — не целочислен, причем $\widetilde{x}_0 > \ell$, то выбрать дробную компоненту $\widetilde{x}_i$ и добавив к ограничениям задачи P' неравенства $x_i \leq \lfloor \widetilde{x}_i \rfloor$ и $x_i \geq \lceil \widetilde{x}_i \rceil$, получить задачи P'_0 и P'_1 соответственно. Добавить P'_0 и P'_1 к $\mathscr{P}$.

Шаг 5. Вернуться на шаг 1.

Легко доказать, что если область допустимых векторов задачи $\mathscr{P}$ ограничена, то алгоритм закончит свою работу за конечное число шагов.

Остался открытым вопрос *о стратегии ветвления*: в какой последовательности генерировать дочерние вершины и какую из дробных координат выбирать для генерации неравенств. Наиболее распространенными стратегиями являются следующие:

- *ветвление в глубину* — спускаемся вниз до первого листа: на шаге 2 алгоритма задача P' извлекается из начала списка $\mathscr{P}$, на шаге 4 задачи P'_0 и P'_1 добавляются в начало списка $\mathscr{P}$.

- *ветвление в ширину* — генерируем вершины по ярусам: на шаге 2 задача P' извлекается из начала списка $\mathscr{P}$, на шаге 4 задачи P'_0 и P'_1 добавляются в начало списка $\mathscr{P}$.

К сожалению, здесь мало теоретических результатов и для выбора хорошей стратегии опираются на интуицию и вычислительный эксперимент. Используемые в алгоритмах правила, не имеющие теоретического обоснования своей эффективности, но дающие хорошие результаты на практике называются *эвристиками*.

Важным является по возможности быстрое получение рекорда, однако процедура ветвления в глубину может привести не к рекорду, а к несовместной системе. С другой стороны, процедура ветвления в ширину требует большого объема памяти. Обычно, к хорошим результатам приводит выбор для ветвления вершины с максимальным значением верхней оценки.

Для выбора дробной координаты считается разумным выбор той из них, которая приводит к максимальному уменьшению верхней оценки целевой функции.

Пример 5.23. Рассмотрим ЗЦЛП

$$\max(-5x_1 + 4x_2)$$
$$\begin{cases} \quad 4x_1 + 3x_2 \le 22, \\ -4x_1 + 3x_2 \le 2, \\ x_1 \in \mathbf{Z}, \quad x_2 \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{111}$$

На рисунке 5.4 приведено соответствующее дерево. Для каждого узла дерева указаны все добавленные неравенства, решение $\widetilde{x}$ соответствующей ЗЛП и оптимальное значение $\widetilde{x}_0$ целевой функции.

Решение $\widetilde{x}_0 = 3$, $\widetilde{x} = (1, 2)$ исходной ЗЦЛП (111) получено в листе P_{000}.

При использовании стратегии поиска в ширину вспомогательные задачи будут построены в последовательности:

$$P,\ P_0,\ P_1,\ P_{00},\ P_{01},\ P_{10},\ P_{11},\ P_{000},\ P_{001}.$$

При использовании стратегии поиска в глубину вспомогательные задачи будут построены в последовательности:

$$P,\ P_0,\ P_{00},\ P_{000},\ P_{001},\ P_{01},\ P_1.$$

Заметим, что задачи P_{10} и P_{11} построены не будут. Действительно, оптимальное значение $\widetilde{x}_0 = 3$ целевой функции для задачи P_{000} дает рекорд

$$P \quad \widetilde{x} = (5/2,\ 4), \quad \widetilde{x}_0 = 7/2$$

$$P_0 \quad x_1 \leq 2, \quad \widetilde{x} = (2,\ 10/3), \quad \widetilde{x}_0 = 10/3$$

$$P_1 \quad x_1 \geq 3, \quad \widetilde{x} = (3,\ 10/3), \quad \widetilde{x}_0 = -5/3$$

$$P_{00} \quad x_1 \leq 2, \quad x_2 \leq 3, \quad \widetilde{x} = (7/4, 3), \quad \widetilde{x}_0 = 13/4$$

$$P_{01} \quad x_1 \leq 2, \quad x_2 \geq 4, \quad \emptyset$$

$$P_{10} \quad x_1 \geq 3, \quad x_2 \leq 3, \quad \widetilde{x} = (3, 3), \quad \widetilde{x}_0 = -3$$

$$P_{11} \quad x_1 \geq 3, \quad x_2 \geq 4, \quad \emptyset$$

$$P_{000} \quad x_1 \leq 2, \quad x_2 \leq 3, \quad x_1 \leq 1, \quad \widetilde{x} = (1, 2), \quad \widetilde{x}_0 = 3$$

$$P_{001} \quad x_1 \leq 2, \quad x_2 \leq 3, \quad x_1 \geq 2, \quad \widetilde{x} = (2, 3), \quad \widetilde{x}_0 = 2$$

Рис. 5.4.

$\ell = 3$ для значения максимума исходной ЗЦЛП (111). В то время как решение $-5/3$ задачи P_1 дает верхнюю оценку для оптимальных значений функции на всех дочерних вершинах. Так как $3 \geq -5/3$, то в листе P_1 ветвление прекратится[5].

Упражнение 5.24. Решите ЗЦЛП (111) графически и постройте области допустимых векторов для каждой из ЗЛП на рис. 5.4.

Обычно метод ветвей и границ с использованием удачных эвристик неплохо работает на практике, однако нетрудно привести примеры, когда

[5]Очевидно, задачу (111) легко решить другим способом, например, графически. Здесь решение этой задачи приводится лишь для иллюстрации метода ветвей и границ.

алгоритм работает слишком долго.

Упражнение 5.25. Докажите, что алгоритм 9, использующий любую стратегию ветвления, при решении ЗЦЛП

$$\max x_1$$

$$\begin{cases} (2^t+1)x_1 = 2^t x_2 \\ 0 \le x_2 \le 2^t, \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

где t — натуральный параметр, требует не менее построит 2^t итераций. Таким образом, трудоемкость алгоритма 9 экспоненциально зависит от длины записи коэффициентов ЗЦЛП.

Упражнение 5.26. Докажите, что для установления несовместности условий ЗЦЛП[6]

$$\max(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_n = n, \\ x_j \in \mathbf{Z} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

где n — нечетно, алгоритм 9 требует $2^{\frac{n+1}{2}}$ итераций. Таким образом, трудоемкость алгоритма 9 экспоненциально зависит от числа переменных.

Заметим, что метод ветвей и границ легко переносится на случай задач частично целочисленного линейного программирования.

5.9. Задачи

5.1. Какое минимальное число стрел нужно, чтобы выбить ровно 50 очков на мишени, изображенной на рисунке 5.5? Сведите данную задачу к ЗЦЛП. Покажите, что множество допустимых значений состоит из одного целочисленного вектора. Решите также соответствующую ЗЛП. К чему приводит округление компонент оптимального вектора этой ЗЛП?

[6] Целевая функция может быть произвольной.

7

9

21

26

31

33

Рис. 5.5.

5.2. Показать, что округление до ближайшего целого компонент оптимального решения ЗЛП, полученной из (81) отбрасыванием требований целочисленности, не приводит к оптимальному решению соответствующей ЗЦЛП.

5.3. Не нарушая общности, в задаче о рюкзаке (81) можно считать, что

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{a_n}.$$

Жадный алгоритм заключается в определении компонент вектора x по формулам:

$$x_j = \left[\frac{b - \sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i x_i}{a_j} \right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Это можно интерпретировать следующим образом. Вначале мы загружаем рюкзак наиболее ценными (на единицу веса) предметами, затем, если осталось место, менее ценными и т. д. Часто, но не всегда, такой алгоритм находит хорошее приближение к оптимуму.

Показать, что жадный алгоритм, примененный к задаче (110), не приводит к оптимальному вектору.

5.4. Пусть

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha - 1 \\ -2\alpha + 2 & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что для каждого ρ найдется такое α, что расстояние от точки $A(\alpha)^{-1}b$ до любой точки $x \in \mathbf{Z}^2$, удовлетворяющей системе $A(\alpha)x \leq b$, будет не меньше ρ.

5.5. Решить ЗЦЛП

$$\max(3x_1 + 6x_2 + 11x_3)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 + 15x_3 \leq 50, \\ x_j \in \mathbf{Z}, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

циклическим алгоритмом Гомори и прямым методом Юнга.

5.6. Решить ЗЦЛП

$$\max(3x_1 + 6x_2 + 11x_3)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 + 15x_3 \geq 50, \\ x_j \in \mathbf{Z}, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

полностью целочисленным алгоритмом Гомори.

Литература

1. *Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю.* Линейное программирование. — М.: Факториал Пресс, 2003.

2. *Гасс С.* Линейное программирование (методы и приложения). — М.: Физматгиз, 1961.

3. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.

4. *Данциг Дж.* Линейное программирование. Его применения и обобщения — М.: Прогресс, 1966.

5. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969.

6. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. — М.: Мир, 1991.

7. *Таланов В. А., Шевченко В. Н.* Системы уравнений транспортного типа с приложением к комбинаторике. — Горький: изд-во Горьков. гос. ун-та, 1978.

8. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. — М.: Мир, 1974.

9. *Шевченко В. Н.* Качественные вопросы целочисленного линейного программирования. — М.: Физматлит, 1995.

10. *Шевченко В. Н.* Линейное и целочисленное линейное программирование. — Горький: изд-во Горьков. гос. ун-та, 1976.

11. *Шевченко В. Н.* Линейное программирование и теория линейных неравенств. — Горький: изд-во Горьков. гос. ун-та, 1977.

12. *Шевченко В. Н.* Множества целочисленных решений квадратной системы линейных неравенств. — Горький: изд-во Горьков. гос. ун-та, 1983.

Предметный указатель

В. Н. Шевченко, Н. Ю. Золотых

Линейное и целочисленное линейное программирование

Редактор издательства *Е. В. Тамберг*

Формат 70×108 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 15. Усл. печ. л. 14. Тираж 400 экз. Заказ

Издательство Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского,
603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23.

Типография ННГУ, 603000, Н. Новгород, ул. Б. Покровская, 37.