Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Факультет вычислительной математики и кибернетики ННГУ

Учебно-исследовательская лаборатория «Математические и программные технологии для современных компьютерных систем (Информационные технологии)»

Образовательный комплекс

Вычислительная топология

Пояснительная записка

Нижний Новгород
2003

Лист регистрации изменений

Дата	*Автор изменения*	*Номер версии*	*Комментарии*
02.06.03	Е.И.Яковлев	1.0	Создание документа
02.06.03	Н.Ю.Золотых	1.1	Техническая правка

Авторский коллектив

Руководитель – д.ф.-м.н., проф. Е.И. Яковлев.

Исполнители:

к.ф.-м.н., доц. Н.И. Жукова,

к.ф.-м.н., доц. А.В. Баландин,

аспирант О.В. Логинов,

студент магистратуры мехмата В.Ю. Белоногова,

студент магистратуры мехмата П.А. Гордиенко,

студент магистратуры мехмата Ю.В. Ершов,

студент 3 курса мехмата М.А. Баутин,

студент 3 курса мехмата Т.Т. Юсупов.

Содержание

Концепции и методы, представленные в общеобразовательном модуле 5

Основные темы курса 5

Обзор доступных образовательных модулей и учебных курсов по теме работы 6

Краткий обзор научных направлений, существующей учебной и научной литературы, основные исследователи и специалисты 6

Перечень крупных международных конференций по рассматриваемой тематике 7

Характеристика основных пользователей и сфера применения образовательного модуля 7

Список литературы 7

Концепции и методы, представленные в общеобразовательном модуле

Термином «вычислительная топология» в принципе можно обозначать два фактически разных научных направления. Одно из них имеет своей целью использование компьютеров при решении тех или иных теоретических проблем самой топологии, например, классификации трехмерных компактных многообразий. Второе, наоборот, посвящено применению топологии в прикладных задачах, связанных с компьютерным моделированием, автоматическим проектированием, компьютерной графикой и визуализацией. В данном образовательном модуле, в основном, будут представлены концепции и методы, относящиеся ко второму из указанных направлений.

Главной задачей вычислительной топологии в нашем понимании является создание и совершенствование методов вычисления топологических характеристик, таких как ранги групп гомологий, индексы пересечения циклов, степени непрерывных отображений и т.д., а также топологических элементов полиэдров, например, компонент связности, линий ветвления, края, нестягиваемых циклов, ручек и т.п.. Поэтому основная часть учебника будет посвящена описанию, обоснованию и анализу вычислительных алгоритмов. При этом планируется включение в него как хорошо известных подходов и алгоритмов, ставших уже классическими, так и новых, разработанных в самое последнее время. Лабораторный практикум полностью предназначен для их изучения.

Вместе с тем для точной постановки задач и обоснования методов их решения, безусловно, требуется строгое определение используемых конструкций и исследование их свойств. Поэтому учебник будет содержать также теоретическую часть, представляющую собой введение в комбинаторную топологию. Однако, учитывая предназначение образовательного комплекса, мы планируем сделать этот раздел учебника минимальным по объему и максимально доступным для изучения. В частности, для достижения указанной цели при построении групп гомологий в качестве коэффициентов выбираются классы вычетов по модулю 2. При этом теория оказывается проще и геометрически нагляднее, а вычисления – более экономными. Более того, с точки зрения практических применений в отмеченных выше областях к потере информации такое сужение конструкции также не приводит, поскольку для 3D-объектов (являющихся полиэдрами трехмерного евклидова пространства) группы целочисленных гомологий свободны и, следовательно, выбор группы коэффициентов не существенен.

Основные темы курса

1. Симплициальные комплексы и полиэдры. Клеточные комплексы.
2. Группы симплициальных гомологий по модулю 2.
3. Сингулярные гомологии и их применения в комбинаторной топологии.
4. Комбинаторная теория поверхностей.
5. Матричные алгоритмы для вычисления групп гомологий.
6. Алгоритмы редукции.
7. Вычисление базисных циклов групп гомологий без применения матриц.
8. Индексы пересечения циклов и методы их вычисления.
9. Поиск одномерных циклов минимальной длины и выделение ручек 2-многообразий.

10. Применения в прикладных задачах.

Обзор доступных образовательных модулей и учебных курсов по теме работы

В Челябинском государственном университете читается учебный курс «Алгоритмическая топология». Однако он, в основном, ориентирован на подготовку специалистов, умеющих использовать компьютеры и алгоритмические методы при решении задач топологии, в частности, топологии трехмерных компактных многообразий.

Краткий обзор научных направлений, существующей учебной и научной литературы, основные исследователи и специалисты

Идея об использовании алгоритмических и компьютерных методов в ряде задач топологии возникла в связи с осознанием сложности их решения традиционными методами. Например, классификация многообразий размерностей 1 и 2 достаточно проста, была получена быстро и изложена в классических учебниках по топологии (см., например, [1]). Но для трехмерных многообразий аналогичная задача оказалась намного более трудной. Поэтому математики стали использовать в этой проблеме компьютеры. Важный вклад в развитие этого направления внесли А.Т. Фоменко, С.В. Матвеев, H. Zieschang (см. [6], [11], [32], [34], [35]).

Созданию алгоритмов и программных средств для вычисления инвариантов многомерных конструкций алгебраической топологии посвящены работы французских математиков под руководством F. Sergeraert (см. [13], [14], [24]). К этому направлению близка и работа [3].

Активные исследования по вычислительной топологии ведут H. Edelsbrunner и его соавторы (см. [17], [27], [30], [33]). В частности, следует отметить разрабатываемые ими дискретный аналог теории Морса и методы их применения. К этой же тематике примыкают работы [10], [16], [31]. В [37] предложен использующий дискретную теорию Морса способ удаления топологического шума в компьютерных моделях.

Развитию и созданию новых методов вычисления групп гомологий и их базисов для триангулированных объектов посвящены работы [7], [17], [23], [30], [36], [38]. Разумеется, стандартный подход к их нахождению хорошо известен (см., [1], [11]). Однако для моделей, состоящих из большого числа симплексов, он не оптимален, а иногда (когда число симплексов порядка миллиона и более) практически неприменим, поскольку основан на преобразованиях матриц инциденций. Один из нематричных алгоритмов для решения этой задачи имеется в теории графов (см. [2]). Оригинальный алгоритм для вычисления рангов групп гомологий без применения матриц разработан в [17]. В [22] J. Friedman предложил использовать для решения этой проблемы комбинаторный аналог оператора Лапласа.

В работах [12], [19] и [20] исследуется топология кривых, лежащих на поверхностях.

Применения вычислительной топологии в смежных и прикладных вопросах обсуждаются в [4], [8], [9], [10], [15], [25], [26], [28], [29], [30].

Перечень крупных международных конференций по рассматриваемой тематике

Поскольку вычислительная топология является сравнительно новым научным направлением, то конференции, специально ей посвященные, пока еще не проводятся. Однако доклады по этой тематике нередки на конференциях по компьютерной геометрии и дискретной математике (например, ACM Symp. on Computational Geometry [5], [12]; SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA) [33]), компьютерной графике и визуализации (SIGGRAPH [18], [26]) и computer science (IEEE Ann. Sympos. Found. Comput. Sci. [19]; ACM Sympos. Theory Comput. [21], [22]).

Характеристика основных пользователей и сфера применения образовательного модуля

Комплекс предназначается для обучения студентов магистратуры двух факультетов: вычислительной математики и кибернетики и механико-математического. Он может быть полезен как будущим топологам и геометрам, так и математикам-программистам, готовящихся заниматься решением прикладных задач, связанных с компьютерным моделированием, автоматическим проектированием, компьютерной графикой и визуализацией.

Список литературы

1. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М. – Л.: ГОНТИ, 1938; Ижевск: НИЦ РХД, 2001. 448 С.
2. Липский В., Комбинаторика для программистов, М.: Мир. 1988.
3. Anick, D. Computing Rational Homotopy Groups in #P-Hard in Computers in Geometry and Topology, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, ed, M. Tangora, Marcel Dekker: New York (1989).
4. Grapo, H. Applications of Geometric Homology, Geometry and Robotics, Springer-Verlag LNCS 391, ed. Boissonnat and Laumond (1989).
5. Vegter, G., and Yap, C.K. Computational Complexity of Combinatorial Surfaces, Proc. 6th ACM Symp. on Computational Geometry, Berkeley, CA (1990), pp. 102-111.
6. С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. Москва: Издательство МГУ. 1991, 1998. 304 С.
7. B.R. Donald and D.R. Chang, On the complexity of computing the homology type of a triangulation - Proc. IEEE, 650-661 (1991).
8. Kent J.R., Parent R.E. and Carlson W.E. Establishing correspondences by topological merging: A new approach to 3d shape transformation. In Proc. Graphics Interface ’91, pages 271-278. Morgan Kaufmann, San Francisco, Calif., June 1991.
9. Helman, J. L. and Hesselink, L. Visualizing vector field topology in fluid flows. IEEE Computer Graphics and Applications, May 1991, pp. 36-46.

10. Shinagawa, Y., Kunii, T. L., and Kergosien, Y. L. Surface coding based on morse theory. IEEE Computer Graphics and Applications 11(5), Sep. 1991, pp. 66-78.

11. А.Т. Фоменко. Наглядная геометрия и топология. Москва: Изд-во МГУ, 1992. 432 С.

12. H. Schipper. Determining contractibility of curves. In "Proc. 8th Sympos. Comput. Geom. 1992", 358-367.

13. Rubio, J. and Sergeraert, F., Locally effective objects and Algebraic Topology, in Computational Algebraic Geometry, Birkhauser, 1993, pp. 235-251.

14. Sergeraert, F., The computability problem in algebraic topology, Advances in Mathematics, 1994, vol. 104, pp. 1-29.

15. Delmarcelle, T. and Hesselink, L. The topology of symmetric, second-order tensor fields. Proceedings IEEE Visualization '94, October 1994, pp. 140-147.

16. R. Forman, A discrete morse theory for cell complexes, Geometry, Topology and Physics for Raoul Bott, International Press, 1994, pp. 112-125.

17. C. J. A. Delfinado and H. Edelsbrunner. An incremental algorithm for betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere. Comput. Aided Geom. Design, 12:771-784, 1995.

18. Schroder, P. and Sweldens, W. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. In Computer Graphics Annual Conference Series, Aug. 1995, pp. 161-172. Proc. SIGGRAPH 95.

19. T. K. Dey and S. Guha. Optimal algorithms for curves on surfaces. In "Proc. 35th IEEE Ann. Sympos. Found. Comput. Sci. 1995", 266-274.

20. T. K. Dey and H. Schipper. A new technique to compute polygonal schema for 2-manifolds with application to null-homotopy detection. Discrete Comput. Georm. V. 14 (1995), 93-110.

21. T. K. Dey and S. Guha. Algorithms for manifolds and simplicial complexes in Euclidean 3-space. In "Proc. 28th ACM Sympos. Theory Comput. 1996", 398-407.

22. J. Friedman. Computing Betti numbers via combinatorial Laplacians. In "Proc. 28th ACM Sympos. Theory Comput. 1996", 386-391.

23. J. Chao and J. Nacayama, Cubical singular simplex model for 3D objects and fast computation of homology groups - Proc. IEEE, 190-194 (1996).

24. Rubio J., Sergeraert, F., and Siret, Y., EAT: Symbolic Software for Effective Homology Computation, ftp: //fourier.ujf-grenoble.fr/pub/EAT, Institut Fourier, Grenoble, 1997.

25. G. Taubin and J. Rossignac, Geometric compression through topological surgery, Research report. IBM (1997).

26. Stander, B. T. and Hart, J. C. Guaranteeing the topology of an implicit surface polygonization for interactive modeling. In Computer Graphics Proceedings, ACM/SIGGRAPH, Aug. 1997, pp. 279-286.

27. Axen U. and Edelsbrunner H. Auditory morse analysis of triangulated manifolds. In H.-C. Hege and K. Polthier editors. Mathematical Visualization, p. 223-236. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

28. J. El-Sana and A. Varshney. Topology simplification for polygonal virtual environments. IEEE Trans. Visualization Comput. Graphics, 4:133-144,1998.

29. Bajaj, C. G. and Schikore D. R. topology preserving data simplification with error bounds. Computers and Graphics 22(1), 1998, pp. 3-12.

30. Dey, T. K., Edelsbrunner, H., and Guha, S. Computational topology. In Chazelle, B., Goodman, J., and Pollack, R., eds., Advances in Discrete and Computational Geometry, Providence, 1998. Contemporary Mathematics, AMS.

31. Hart J.C, Morse theory for implicit surface modeling. In Hege, H.-C. and Polthier, K., eds.. Mathematical Visualization, pp. 257-268. Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.

32. Matveev S.V., Computer recognition of three-manifolds, Experimental Mathematics, 1998, V. 7, N. 2, 153 - 161

33. Axen U. Computing morse functions on triangulated manifolds. In Proceedings of the SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 1999.

34. C. Hayat-Legrand, S.V. Matveev and H. Zieschang. Computer calculation of the degree of maps into the Poincare homology sphere, Preprint IHES, M/99/11, 1999.

35. С.В. Матвеев. Algorithmic classification of 3-manifolds: Problem and results. Труды Математического института имени В.А. Стеклова, Т. 225, 1999, 264-275.

36. Яковлев Е.И., Гордиенко П.А. Быстрые алгоритмы вычисления групп гомологий и их базисов. Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», 2001, с. 284-287.

37. Guskov I., Wood Z.J. Topological Noise Removal. In GI 2001 proceedings, June 2001, pp. 19-26.

38. Gordienko P.A., Krakhnov A.D., Yakovlev E.I. The algorithms of homology groups basis cycles fast calculation and topological recognition of a 2D polyhedron. In GraphiCon`2001 Conference Proceedings, Computational Geometry Section, p. 177-181.