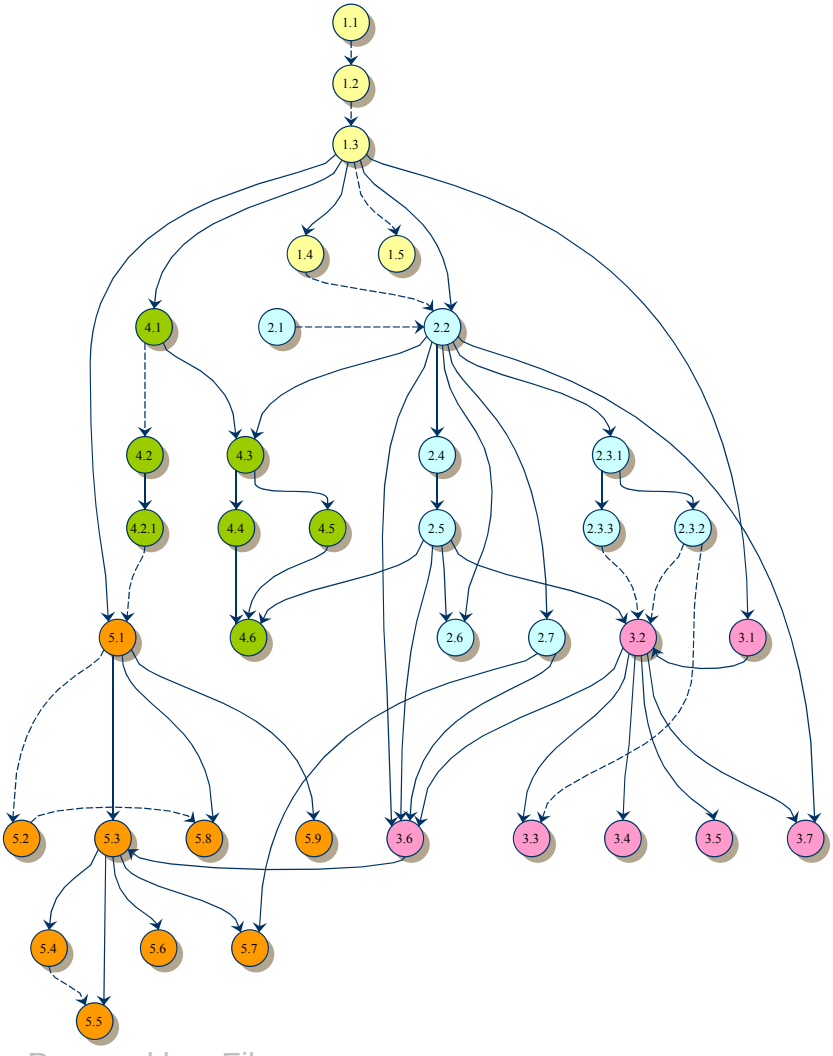
Граф зависимости разделов



Powered by yFiles

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В.Н. Шевченко, Н.Ю. Золотых

ЛИНЕЙНОЕ И ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рекомендовано Научно-методическим советом по прикладной математике и информатике УМО университетов РФ в качестве учебника для студентов, обучающихся по направлению 510200 – Прикладная математика и информатика и по специальности 010200 – Прикладная математика и информатика

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2005

ББК 22.18 + 22.176
УДК 519.852 + 519.854
Ш31

Рецензенты:

заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники Нижегородского государственного педагогического университета, профессор, д.ф.-м.н. *М.А. Иорданский*;

заведующий кафедрой математической физики Нижегородского государственного университета, профессор, д.ф.-м.н. *М.И. Сумин*.

Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. **Линейное и целочисленное линейное программирование:** Учебник. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2005. — 160 с. (Модели и методы конечномерной оптимизации. Вып. 1).

ISBN 5–85746–820–5

Учебник посвящен основам теории линейного и целочисленного линейного программирования. В нем излагаются симплекс-метод, теория двойственности, алгоритмы решения транспортной задачи, методы решения задач целочисленного линейного программирования. Приводятся многочисленные примеры и задачи для самостоятельного решения.

Для студентов математических и других специальностей, изучающих линейное и целочисленное линейное программирование.

Работа выполнена в учебно-исследовательской лаборатории «Математические и программные технологии для современных компьютерных систем (Информационные технологии)» при поддержке корпорации «Интел».

ISBN 5–85746–820–5 ББК 22.18 + 22.176

© В.Н. Шевченко, Н.Ю. Золотых, 2005

Оглавление

Обозначения **6**

Предисловие **7**

Глава 1. Основные определения, идеи, примеры задач **8**
1.1. Задача математического программирования 8
1.2. Задача выпуклого программирования 10
1.3. Задача линейного программирования 17
1.4. Основная идея симплекс-метода 21
1.5. Примеры задач линейного программирования 22
1.5.1. Задача максимизации прибыли 22
1.5.2. Задача о «смесях» 23
1.6. Задачи 25

Глава 2. Симплекс-метод **28**
2.1. Числовой пример 28
2.2. Симплекс-метод в строчечной форме 32
2.3. Зацикливание и способы защиты от него 39
2.3.1. Зацикливание 39
2.3.2. Лексикографический метод 43
2.3.3. Правило Бленда 46
2.4. Получение начального допустимого опорного вектора . . 50
2.5. Матричное описание симплекс-метода 53
2.6. Модифицированный симплекс-метод 57
2.7. Столбцовая форма симплекс-метода 60
2.8. Задачи 64

Глава 3. Двойственность в линейном программировании 66
3.1. Двойственная задача 66
3.2. Теорема двойственности 69
3.3. Лемма Фаркаша и ее варианты 73
3.4. Дополняющая нежесткость в линейном программировании 76
3.4.1. Слабая форма свойства дополняющей нежесткости 76
3.4.2. Сильная форма свойства дополняющей нежесткости 79
3.5. Множители Лагранжа 81
3.6. Двойственный симплекс-метод 86
3.6.1. Двойственный симплекс-метод в строчечной форме 86
3.6.2. Двойственный симплекс-метод в столбцовой форме 88
3.7. Замечания о сложности ЗЛП 91
3.8. Задачи 94

Глава 4. Транспортная задача 96
4.1. Постановка задачи и основные свойства 96
4.2. Унимодулярные матрицы 99
4.2.1. Задача о назначениях 100
4.3. Графовая характеристика допустимых векторов 101
4.4. Получение начального допустимого опорного вектора . . 103
4.4.1. Метод северо-западного угла 104
4.4.2. Метод минимального элемента 105
4.5. Пересчет опорного вектора при изменении базы 106
4.6. Метод потенциалов 108
4.7. Задачи 112

Глава 5. Целочисленное линейное программирование 114
5.1. Основные определения 114
5.2. Примеры задач целочисленного линейного программирования 115
5.2.1. Задача о рюкзаке 115
5.2.2. Задачи с фиксированными доплатами 116
5.2.3. Дихотомии 116
5.2.4. Задачи о выполнимости КНФ 117
5.2.5. Задача о «раскрое» 118
5.2.6. Задача коммивояжера 119
5.3. Идея метода правильных отсечений 121
5.4. Циклический алгоритм Гомори 122

5.5. Классификация методов отсечения 132
5.6. Полностью целочисленный алгоритм 133
5.7. Прямой метод целочисленного программирования 139
5.8. Задача о рюкзаке. Динамическое программирование . . . 141
5.9. Метод ветвей и границ 144
5.10. Задачи 150

Литература **152**

Предметно-именной указатель **153**

Обозначения

$\mathbf{Z}$	кольцо целых чисел
$\mathbf{Q}$	поле рациональных чисел
$\mathbf{R}$	поле вещественных чисел
P^n	множество n-мерных арифметических векторов с компонентами из P (рассматриваемых как строки или как столбцы)
$\operatorname{rank} A$	ранг матрицы A
$\det A$	определитель матрицы A
$A^\top$	матрица, транспонированная к матрице A
$\lfloor \alpha \rfloor$	целая часть числа α: наибольшее целое, не превосходящее α
$\lceil \alpha \rceil$	наименьшее целое, не меньшее α
$\{\alpha\}$	дробная часть числа α: $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$

Предисловие

Настоящий учебник является коренной переработкой учебных пособий [7, 10, 12], вышедших в свет более 25 лет назад. Он основан на курсе лекций по дисциплине «Линейное программирование» и, частично, — специальном курсе «Дискретная оптимизация», читаемых для студентов факультета ВМК по специальности «Прикладная математика и информатика».

Учебник включает изложение симплекс-метода, теории двойственности, алгоритмов решения транспортной задачи и методов решения задач целочисленного линейного программирования. Основные результаты теории двойственности выводятся из свойств симплекс-таблиц.

Приводимые в учебнике алгоритмы иллюстрируются многочисленными примерами. Упражнения, вкрапленные в основной текст, дополняют теоретический материал. Задачи, списком которых завершается каждая глава, предназначены для закрепления основного материала.

В конце книги приведен список литературы. Авторы ни в коей мере не претендуют на его полноту. Подробную библиографию см. в [1, 4, 6, 9]. Для ознакомления с историей развития и современным состоянием линейного программирования мы рекомендуем обзор [11].

Авторы благодарят своих коллег С.И. Веселова, А.Ю. Чиркова, В.А. Таланова и М.М. Шульца за полезные обсуждения. Мы также выражаем признательность С.В. Сидорову, указавшему на многие опечатки и неточности в первоначальных вариантах рукописи. Мы особенно благодарны редактору издательства Л.А. Гасиловой, выполнившей огромную работу по улучшению изложения.

Глава 1

Основные определения, идеи, примеры задач

1.1. Задача математического программирования

До XIX века основным поставщиком прикладных задач для математики были астрономия, механика, физика, а основной и весьма плодотворной идеей — идея непрерывности, приведшая к становлению мощного аппарата интегрально-дифференциального исчисления. Развитие экономики привело к возможности рассмотрения количественных закономерностей и в рамках этой науки; с появлением экономических моделей Ф. Кенэ[1] (1758 г.), К. Маркса[2], Л. Вальраса[3] и др. по существу началась математическая экономика.

В 1939 г. вышла в свет монография Л. В. Канторовича[4] «Математические методы организации и планирования производства», где выявлен широкий класс производственно-экономических оптимизационных задач, допускающих строгое математическое описание. Идеи, содержащиеся в этой книге, были затем им развиты и привели к созданию линейного программирования. Начиная с 1942 г., исследования по линейному,

[1] Франсуа Кенэ (1694–1774) — французский экономист.

[2] Карл Маркс (1818–1883) — немецкий экономист и философ.

[3] Леон Вальрас (1834–1910) — французский экономист.

[4] Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) — советский математик и экономист; академик АН СССР (1964); лауреат Государственной премии СССР (1949), Ленинской премии (1965), Нобелевской премии (1975, с формулировкой «за вклад в теорию оптимального использования ресурсов», совместно с Т. Купмансом). Основные труды по функциональному анализу, вычислительной математике и экономике.

а позже и нелинейному программированию активно ведутся и в США (Дж. Данциг[5], Т. Купманс[6], Дж. фон Нейман[7] и др.).

Таким образом, в середине XX века выкристаллизовались оптимизационные задачи двух типов: максимизации прибыли при ограниченных ресурсах и минимизации расходов для осуществления заданного комплекса работ. Рассмотрим подробнее первую из них. Пусть на предприятии изготавливаются n видов продукции. Обозначим объемы ее выпуска через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно. Таким образом, план работы предприятия можно охарактеризовать вектором $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. По x однозначно находится вектор $y = F(x)$, описывающий затраты ресурсов, и число $f(x)$, соответствующее прибыли. Возможно, что на x нужно наложить еще ограничения технологического характера, которые могут принимать вид равенств, неравенств или описываться более сложно. Требуется определить план выпуска продукции, при котором ограничения на ресурсы выполнены, а прибыль $f(x)$ максимальна.

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^n$, элементы которого будем называть *векторами*, или *точками*. Пусть M — множество точек, называемое *допустимым множеством*. Произвольный вектор x из M называется *допустимым вектором* или *планом*. Пусть $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Функция $f(x)$ называется *целевой*. Вектор $\widetilde{x} \in M$ назовем *оптимальным*, или *точкой* (*глобального*) *максимума*, если $f(\widetilde{x}) \geq f(x)$ для всякого x из M.

Задача математического программирования, или *задача оптимизации*, состоит в решении следующих подзадач:

1) проверить, существует ли $x \in M$;

2) выяснить, существует ли оптимальный вектор $\widetilde{x}$;

3) найти какой-нибудь оптимальный вектор $\widetilde{x}$ и вычислить $f(\widetilde{x})$.

Для сокращенного обозначения задачи математического программирования введем запись

$$\max_{x \in M} f(x). \tag{1}$$

[5] Джордж Бернард Данциг (род. 1914) — американский математик.

[6] Тьяллинг Чарлз Купманс (1910–1985) — американский экономист голландского происхождения; лауреат Нобелевской премии (1975, совместно с Л. В. Канторовичем).

[7] Джон фон Нейман (1903–1957) — математик, один из основателей кибернетики; родился в Венгрии, жил и работал в Германии и США.

Задачу (1) называют также задачей максимизации функции $f(x)$ на множестве M (или при ограничениях $x \in M$).

Наряду с задачей (1) *на максимум* рассматривают задачу *на минимум*:

$$\min_{x \in M} f(x). \tag{2}$$

В этом случае вектор $\widetilde{x} \in M$ называется *оптимальным*, или *точкой* (*глобального*) *минимума*, если $f(\widetilde{x}) \leq f(x)$ для всякого x из M. Заметим, что задача минимизации функции $f(x)$ сводится к задаче максимизации функции $g(x) = -f(x)$.

Если $M = \emptyset$, то задача математического программирования называется *несовместной*. В этом случае также говорят, что несовместны условия этой задачи.

По-видимому, общего алгоритма, решающего задачу математического программирования, не существует. С другой стороны, имеется много важных приложений, приводящих к классам задач вида (2), в которых M и $f(x)$ удовлетворяют каким-то дополнительным предположениям. Рассмотрим некоторые из этих классов.

1.2. Задача выпуклого программирования

Определение 1.1. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — точки, α_i — некоторые числа, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. *Выпуклой комбинацией* точек $p_1, p_2, \ldots, p_s$ называется точка

$$p = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i.$$

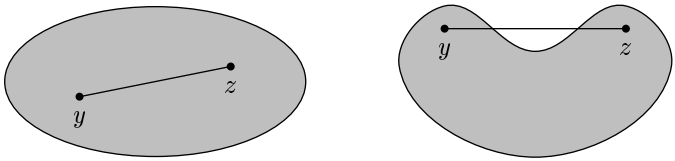
Определение 1.2. *Выпуклой оболочкой* $\operatorname{Conv} M$ множества точек M называется множество всех их выпуклых комбинаций. В частности, для конечного множества $M = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$

$$\operatorname{Conv}\{p_1, p_2, \ldots, p_s\} = \left\{ p = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i : \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots, s) \right\}.$$

Определение 1.3. Выпуклая оболочка двух точек y и z называется *отрезком* и обозначается $[y, z]$. Итак, $[y, z] = \{\alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z : 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

Определение 1.4. Множество M называется *выпуклым*, если для любых двух точек y и z из M справедливо $[y, z] \subseteq M$.

На рис. 1.1a изображено выпуклое множество, а на рис. 1.1b — невыпуклое.



a) b)

Рис. 1.1

Упражнение 1.5. Докажите, что выпуклая оболочка является минимальным по включению выпуклым множеством, содержащим заданное множество точек. Для этого докажите, что 1) $\operatorname{Conv} M$ — выпуклое множество, 2) для любого выпуклого P, содержащего M, справедливо $\operatorname{Conv} M \subseteq P$. Это иллюстрируется рис. 1.2.

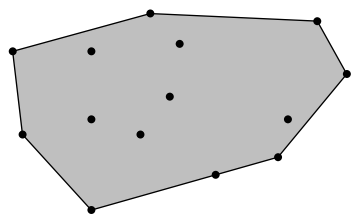


Рис. 1.2

Рассмотрим примеры выпуклых множеств.

Определение 1.6. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$. *Замкнутым полупространством* называется множество

$$H(a, a_0) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq a_0 \right\}.$$

Утверждение 1.7. *Замкнутое полупространство выпукло.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$ и $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^\top$ — две точки замкнутого полупространства $S(a, a_0)$. Докажем, что точка $\alpha z + (1 - \alpha)y$, где $0 \leq \alpha \leq 1$, также принадлежит $S(a, a_0)$. Для этого убедимся в справедливости неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha \cdot z_i + (1 - \alpha) \cdot y_i) \leq a_0. \tag{3}$$

По определению для точек y и z выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i z_i \leq a_0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leq a_0.$$

Умножая эти неравенства соответственно на неотрицательные числа α и $(1 - \alpha)$, а затем складывая, получим (3). ∎

Определение 1.8. *Шаром* размерности n радиуса r называется множество

$$B_n(r) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq r^2 \right\}.$$

Утверждение 1.9. *Шар является выпуклым множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$ и $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^\top$ — точки из $B_n(r)$. Покажем, что точка

$$\alpha \cdot z + (1 - \alpha) \cdot y = (\alpha z_1 + (1 - \alpha)y_1, \ldots, \alpha z_n + (1 - \alpha)y_n),$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$, принадлежит $B_n(r)$. Проделаем преобразования:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha z_i + (1 - \alpha)y_i)^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sum_{i=1}^{n} y_i z_i + (1 - \alpha)^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}.$$

Заменяя во всех выражениях

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

на r^2, получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha z_i + (1-\alpha) y_i)^2 \le (\alpha^2 + 2\alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2) r^2 = r^2,$$

что и требовалось. ∎

Утверждение 1.10. *Пересечение выпуклых множеств выпукло.*

Доказательство. Пусть $\{M_i : i \in I\}$ — система (возможно, бесконечная) выпуклых множеств и

$$M = \bigcap_{i \in I} M_i.$$

Пусть y и z — точки из M и α — некоторое число, $0 \le \alpha \le 1$. Поскольку для каждого i справедливо включение $M \subseteq M_i$, то точки y и z принадлежат M_i. Так как M_i — выпуклое множество, то точка $(1-\alpha) \cdot y + \alpha \cdot z$ принадлежит M_i, а значит, и пересечению M. ∎

Определение 1.11. *Полиэдром*, или *многогранным множеством*, называется множество решений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ системы линейных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

Из определения получаем, что полиэдр есть пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Выпуклость полиэдра следует из утверждений 1.7 и 1.10.

Определение 1.12. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* на выпуклом множестве M, если для любых двух точек x и y из M и любого числа α такого, что $0 \le \alpha \le 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y). \tag{4}$$

Функция $f(x)$ называется *вогнутой* на выпуклом множестве M, если для любых двух точек x и y из M и любого числа α такого, что $0 \le \alpha \le 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{5}$$

Очевидно, функция $f(x)$ является вогнутой тогда и только тогда, когда $g(x) = -f(x)$ выпукла.

Геометрически неравенство (5) означает, что дуга графика выпуклой функции не должна быть расположена выше стягивающей хорды (см. рис. 1.3).

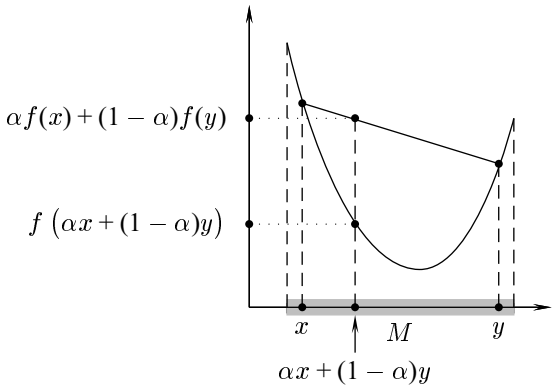


Рис. 1.3

Лемма 1.13. *Если $f(x)$ выпукла на M, $p_i \in M$, $\alpha_i \ge 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ и $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, то*

$$f\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i\right) \le \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(p_i).$$

Доказательство. Индукция по s. ∎

Заметим, что если функция $f(x)$ — выпуклая на выпуклом множестве M, то множество $\{x \in M : f(x) \le \beta\}$ также выпукло. В частности,

выпуклость полупространства $H(a, a_0)$ следует из выпуклости линейной функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

а выпуклость шара $B_n(r)$ вытекает из выпуклости функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Определение 1.14. Задача минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве и задача максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве называются *задачами выпуклого программирования*.

Итак, задача выпуклого программирования является частным случаем задачи математического программирования (1), когда M — выпуклое множество, а функция $f(x)$ вогнута на M. Также задача выпуклого программирования является частным случаем задачи (2), когда M — выпуклое множество, а функция $f(x)$ выпукла на M.

Важным свойством задачи выпуклого программирования является совпадение локального и глобального минимумов.

Определение 1.15. Точка $\widetilde{x}$ из M называется *локальным минимумом* функции $f(x)$ на M, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого y из M, удовлетворяющего неравенству $|y - \widetilde{x}| < \varepsilon$, выполняется неравенство $f(\widetilde{x}) \le f(y)$.

Другими словами, точка $\widetilde{x}$ является точкой локального минимума, если найдется такая ε-окрестность точки $\widetilde{x}$, что значение функции $f(x)$ в любой точке этой окрестности не меньше $f(\widetilde{x})$.

Аналогично вводится понятие точки локального максимума.

Теорема 1.16. *Всякий локальный минимум в задаче выпуклого программирования на минимум является оптимальным вектором.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{x}$ — локальный минимум выпуклой на M функции $f(x)$ и вопреки доказываемому утверждению существует $\widehat{x} \in M$ такой, что $f(\widehat{x}) < f(\widetilde{x})$. По определению выпуклой функции, при $0 < \alpha \le 1$ выполняются неравенства

$$f(\alpha\widehat{x} + (1-\alpha)\widetilde{x}) \le \alpha f(\widehat{x}) + (1-\alpha) f(\widetilde{x}) < f(\widetilde{x}).$$

Однако это противоречит локальной минимальности $\widetilde{x}$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ точка $z = \alpha\widehat{x} + (1-\alpha)\widetilde{x}$, где

$$\alpha = \min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{\varepsilon}{2|\widehat{x}-\widetilde{x}|}\right\},$$

принадлежит как M (в силу выпуклости), так и ε-окрестности точки $\widetilde{x}$ (так как $|z-\widetilde{x}| = \alpha|\widehat{x}-\widetilde{x}| < \varepsilon$). ∎

Таким образом, чтобы определить, достигает ли выпуклая на выпуклом множестве M функция $f(x)$ минимума в точке $\widetilde{x}$, достаточно рассмотреть поведение $f(x)$ вблизи $\widetilde{x}$; если $\widetilde{x}$ — неоптимальный вектор, то найдется отрезок (направление), двигаясь по которому можно получить новый допустимый вектор с меньшим, чем в $\widetilde{x}$, значением $f(x)$. Методы, основанные на этой идее, называются *градиентными*.

Не так обстоит дело, если речь идет о максимизации выпуклой на выпуклом множестве M функции $f(x)$.

Определение 1.17. Задача максимизации выпуклой функции на выпуклом множестве и задача минимизации вогнутой функции на выпуклом множестве называются *задачами вогнутого программирования*.

В таких задачах для нахождения оптимального вектора, вообще говоря (как правило, так оно и бывает), необходимо перебрать все локальные максимумы. Если в рассматриваемом случае M задано в виде $M = \mathrm{Conv}\{p_1, \ldots, p_s\}$, то имеет место следующая теорема.

Теорема 1.18. *Если* $M = \mathrm{Conv}\{p_1, \ldots, p_s\}$ *и* $f(x)$ *— выпуклая на* M *функция, то среди векторов* $p_1, \ldots, p_s$ *есть оптимальный вектор задачи* (1).

Доказательство. Пусть k такое число, что

$$f(p_k) = \max\{f(p_i):\ i = 1, \ldots, s\}.$$

Тогда для любого $p \in \mathrm{Conv}\{p_1, \ldots, p_s\}$ имеет место

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{s}\alpha_i p_i\right) \le \sum_{i=1}^{s}\alpha_i f(p_i) \le f(p_k),$$

т. е. p_k — оптимальный вектор задачи (1). ∎

Разумеется, теорема 1.18 сводит дело к конечному перебору, однако число s в практически важных задачах настолько велико, что осуществить этот перебор не под силу и компьютеру. С другой стороны, известные из математического анализа условия выделяют точки, «подозрительные» на локальный экстремум, лишь внутри области и, следовательно, здесь не работают.

Пусть теперь $M = \mathrm{Conv}\{p_1, \ldots, p_s\}$, а $f(x)$ — линейная функция. В этом случае применимы и теорема 1.16 и теорема 1.18, и полный перебор векторов $p_1, \ldots, p_s$ можно попытаться заменить их упорядоченным перебором. Симплекс-метод, рассматриваемый ниже, является конкретизацией этой идеи.

1.3. Задача линейного программирования

Определение 1.19. Задача минимизации или максимизации линейной функции на полиэдре M называется *задачей линейного программирования* (ЗЛП).

Согласно определению, ЗЛП может быть записана в виде

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i & (i = 1, \ldots, k), \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i & (i = k+1, \ldots, k+s), \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i = k+s+1, \ldots, m), \end{cases} \tag{6}$$

где величины c_j, a_{ij}, b_i $(j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m)$ являются элементами некоторого подполя F поля вещественных чисел $\mathbf{R}$. Умножив неравенства с $(k+1)$-го по $(k+s)$-е на -1 и переименовав коэффициенты, представим ЗЛП (6) в виде:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i & (i = 1, \ldots, k+s), \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i = k+s+1, \ldots, m). \end{cases} \tag{7}$$

Если вместо задачи на максимум в (6) рассматривается задача на минимум, то форму (7) легко получить умножением целевой функции на -1 и переименованием коэффициентов.

ЗЛП в форме (7) называется *общей*. Кроме общей формы ЗЛП выделяют также стандартную и каноническую формы. ЗЛП вида

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{8}$$

называется *стандартной*, а ЗЛП вида

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{9}$$

называется *канонической*.

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица $m \times n$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^\top$ — вектор-столбец, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — вектор-строка. Если $a = (a_1, \ldots, a_m)$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)$, то под неравенством $a \ge b$ будем понимать m неравенств $a_i \ge b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Используя матричные операции, запишем стандартную и каноническую ЗЛП в матричном виде:

$$\max cx \qquad\qquad \max cx$$

$$\begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} Ax = b, \\ x \ge 0 \end{cases}$$

соответственно. Для аналогичного представления общей ЗЛП понадобится блочное представление:

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b' \\ b'' \end{pmatrix},$$

где A' и b' состоят из первых s строк матрицы A и первых s компонент вектора b, а A'' и b'' — из остальных строк матрицы A и остальных компонент вектора b соответственно. Общая ЗЛП примет вид:

$$\max cx$$

$$\begin{cases} A'x \le b', \\ A''x = b''. \end{cases}$$

Все введенные формы ЗЛП эквивалентны в том смысле, что каждую из них можно преобразовать к любой другой. Оставшаяся часть данного раздела посвящена доказательству этого факта.

Покажем, как привести общую ЗЛП к стандартной. Для этого каждое уравнение $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ из (7) заменим двумя неравенствами

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &\le b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n &\le -b_i, \end{aligned}$$

положим

$$u_j = \max\{0, x_j\}, \quad v_j = \max\{0, -x_j\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

и потребуем выполнения неравенств $u_j \ge 0$, $v_j \ge 0$. Очевидно, что $x_j = u_j - v_j$, поэтому общая задача линейного программирования в новых переменных будет иметь вид стандартной ЗЛП:

$$\max(c_1(u_1 - v_1) + c_2(u_2 - v_2) + \ldots + c_n(u_n - v_n))$$

$$\begin{cases} a_{i1}(u_1 - v_1) + \ldots + a_{in}(u_n - v_n) \le b_i & (i = 1, \ldots, k+s), \\ a_{i1}(u_1 - v_1) + \ldots + a_{in}(u_n - v_n) \le b_i & (i = k+s+1, \ldots, m), \\ a_{i1}(v_1 - u_1) + \ldots + a_{in}(v_n - u_n) \le -b_i & (i = k+s+1, \ldots, m), \\ u_j \ge 0,\ v_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \end{cases} \tag{11}$$

или в матричном виде:

$$\max(cu - cv)$$

$$\begin{cases} A'u - A'v \le b', \\ A''u - A''v \le b'', \\ -A''u + A''v \le -b'', \\ u \ge 0, \quad v \ge 0, \end{cases}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^\top$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top$.

Если общая задача линейного программирования имеет оптимальный вектор x, то стандартная ЗЛП (11) тоже имеет оптимальный вектор, который можно найти по формулам (10). С другой стороны, по оптимальному вектору (u, v) стандартной ЗЛП (11) можно найти оптимальный вектор $x = u - v$ общей ЗЛП. Очевидно, что значения целевых функций на соответствующих векторах равны. Таким образом, общая задача линейного программирования (7) сводится к стандартной задаче линейного программирования (11).

Приведем стандартную ЗЛП (8) к каноническому виду. Для этого введем новые неизвестные y_i $(i = 1, 2 \ldots, m)$, называемые *слабыми переменными*, или *невязками*. Рассмотрим каноническую ЗЛП

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \end{cases} \tag{12}$$

или в матричном виде:

$$\max cx$$

$$\begin{cases} Ax + y = b, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top$. Легко видеть, что между оптимальными векторами x стандартной ЗЛП (8) и оптимальными векторами (x, y) канонической ЗЛП (12) существует взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow (x, b - Ax)$. Таким образом, стандартная ЗЛП сводится к канонической.

Так как каноническая ЗЛП является частным случаем общей задачи линейного программирования, то эквивалентность всех форм ЗЛП установлена.

1.4. Основная идея симплекс-метода

Попробуем показать, как из теорем 1.16 и 1.18 можно получить алгоритм решения ЗЛП. Более формальное изложение этого алгоритма, носящего название *симплекс-метод*, находится в последующих разделах.

Рассмотрим стандартную ЗЛП (8). Если $b \geq 0$, то $x = 0$ — допустимый вектор. Если при этом $c \leq 0$, то для любого допустимого вектора справедливо $cx \leq 0$, следовательно, нулевой вектор является оптимальным. Если найдется такое s, при котором $c_s > 0$, то попытаемся увеличить x_s, не меняя при этом других координат и сохраняя условие допустимости (ср. с теоремой 1.16). Ясно, что если для всех $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ выполнено неравенство $a_{is} \leq 0$, то величину x_s можно увеличивать неограниченно и, следовательно, целевая функция на множестве допустимых векторов не ограничена сверху. Если же найдется такое i, при котором $a_{is} > 0$, то неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \tag{13}$$

ограничивает рост x_s величиной b_i / a_{is}. Положим

$$\alpha = \frac{b_r}{a_{rs}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} : a_{ij} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

Если $\alpha > 0$, то получим новый допустимый вектор αe_s, где e_s — вектор, у которого все компоненты равны 0, кроме s-й, равной 1. Значение линейной формы на векторе αe_s равно $\alpha c_s > 0$. Можно проверить[8], что замена переменной x_s на переменную

$$y_r = b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j$$

приведет к стандартной задаче с неотрицательной правой частью, и процесс можно повторить. Указанную замену переменных можно выполнить и при $\alpha = 0$ (так и делается), однако при этом «новый» допустимый вектор равен «старому».

Заметим, что существуют примеры, показывающие, что условие $c \leq 0$ не является необходимым (но, разумеется, является достаточным) условием оптимальности точки $x = 0$ (см. задачу 1.13).

[8] Формально это будет вытекать из результатов раздела 2.2.

Термин «симплекс-метод» был предложен Т.С. Моцкиным[9] и Дж. Данцигом. Поясним происхождение этого термина.

Определение 1.20. Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_t$ — точки в $\mathbf{R}^n$, такие, что векторы $q_1 = p_1 - p_0, q_2 = p_2 - p_0, \ldots, q_t = p_t - p_0$ линейно независимы. Множество $\mathrm{Conv}\{p_0, p_1, \ldots, p_t\}$ называется *t-мерным симплексом*.

Упражнение 1.21. Доказать, что n-мерный симплекс можно описать как множество решений системы, состоящей из $n+1$ линейного неравенства. Указание: доказать, что если $p_0 = 0$, то система имеет вид $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \le b$, $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, иначе перейти к системе координат с началом в точке p_0 и базисом $q_1, \ldots, q_n$.

Приписав к неравенствам $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ограничение (13) получим систему неравенств, определяющую (в случае ограниченности полученного множества) n-мерный симплекс. Таким образом, симплекс-метод можно описать как движение от одного симплекса к соседнему.

1.5. Примеры задач линейного программирования

1.5.1. Задача максимизации прибыли

Пусть имеется m видов ресурсов в количестве $b_1, b_2, \ldots, b_m$, которые могут быть использованы при производстве n видов изделий. Известны числа a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, характеризующие количество i-го ресурса, необходимого для производства единицы j-го изделия. Кроме этого, известна стоимость c_j единицы j-го изделия. Необходимо найти план выпуска изделий, максимизирующий прибыль от продажи всех изделий.

Обозначив через x_j количество j-го изделия, получим ЗЛП:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = 1, \ldots, m), \\ x_j \ge 0 & (j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

[9] Теодор Самуэль Моцкин (1908–1970) — математик. Родился в Германии, жил и работал в Германии, Израиле и США.

Заметим, что если j-е изделие неделимо, то на x_j должно быть наложено требование целочисленности. Полученная задача, называемая *задачей с неделимостями*, является задачей (частичного) целочисленного линейного программирования (см. главу 5).

1.5.2. Задача о «смесях»

Имеется n компонентов, при сочетании которых в различных пропорциях образуются различные смеси. В состав каждого компонента входят m веществ. Пусть a_{ij} означает количество i-го вещества ($i = 1, \ldots, m$), которое входит в состав единицы j-го компонента ($j = 1, \ldots, n$). Заданы числа c_j ($j = 1, \ldots, n$), характеризующие цену единицы j-го компонента, и числа b_i ($i = 1, \ldots, m$), указывающие минимально необходимое содержание i-го вещества в смеси. Требуется определить состав смеси минимальной стоимости.

Пусть числа $x_j \geq 0$ ($j = 1, \ldots, n$) характеризуют количество j-го компонента в смеси. Тогда задача принимает следующий вид. Требуется минимизировать функцию, характеризующую общую стоимость:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

при условиях обязательного минимального содержания каждого вещества:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

По-видимому, одной из первых практических задач такого рода была задача составления диеты, поставленная в 1945 г. Дж. Стиглером[10] и решенная под его руководством в Национальном бюро стандартов США. Рассматриваемая система имела параметры $m = 9$, $n = 77$ (см. [4, с. 521–527]).

Пример 1.22. (Ирландский парадокс.) Р. Гиффен[11] обратил внимание на то, что во время голода в Ирландии в середине XIX века при росте

[10] Джордж Стиглер (1911–1991) — американский математик и экономист. Лауреат Нобелевской премии по экономике (1982).

[11] Роберт Гиффен (1837–1910) — английский статистик и экономист.

цен на картофель спрос на него существенно увеличился. Это противоречит классическому закону спроса: при росте цены объем приобретаемого товара уменьшается. Увеличение спроса на товар при увеличении цены на него в экономической литературе носит название *эффект Гиффена*. Попробуем дать объяснение этому «парадоксу».

Предположим, что основу питания ирландцев составляли картофель и мясо[12]. Пусть пищевая ценность 1 кг картофеля составляет 2 единицы, а пищевая ценность 1 кг мяса — 5 единиц, при этом общая питательная ценность пищи, потребляемой человеком за неделю, не должна быть меньше 20 единиц. Рыночная цена 1 кг картофеля — 1 ирландский фунт, 1 кг мяса — 5 ирландских фунтов. В среднем ирландец не мог тратить на питание более 15 ирландских фунтов. Определим рацион питания, при котором потребление мяса достигает максимума.

Обозначим через x_1 количество потребляемого за неделю картофеля, а через x_2 — количество потребляемого за неделю мяса. Получаем следующую ЗЛП:

$$\max x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 20, \\ x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решим ее графически (см. рис. 1.4).

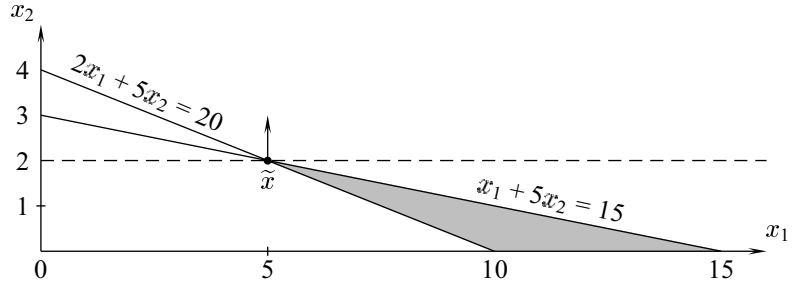


Рис. 1.4

Допустимая область представляет собой треугольник. Оптимум достигается в точке $\widetilde{x} = (5, 2)^\top$.

[12]Приведенные далее числа условны.

Пусть цены на картофель увеличились на 25 %. Соответствующая ЗЛП имеет вид:

$$\max x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 20, \\ {}^5\!/_4\, x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Также решим ее графически (см. рис. 1.5). Теперь оптимум достигается в точке $\widetilde{x} = ({}^{20}\!/_3\,,\, {}^4\!/_3)^\top$. Как видим, потребление мяса уменьшилось.

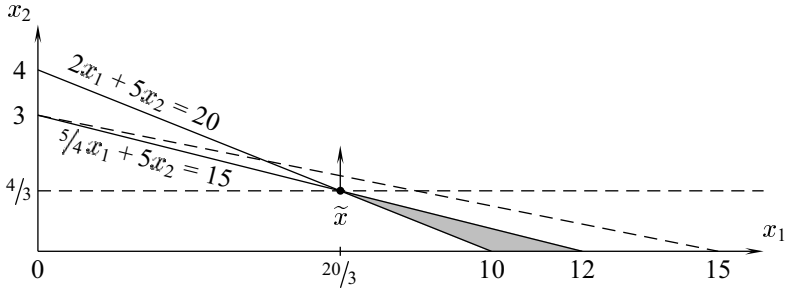


Рис. 1.5

1.6. Задачи

1.1. Выпукло ли множество точек $(x_1, x_2)^\top \in \mathbf{R}^2$, для которых $x_1 \geq 0$ или $x_2 \geq 0$?

1.2. *Аффинной комбинацией* точек $p_1, p_2, \ldots, p_s$ называется точка

$$p = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1.$$

Аффинной оболочкой $\operatorname{Aff} M$ множества точек M называется множество всех их аффинных комбинаций. Доказать выпуклость множества $\operatorname{Aff} M$.

1.3. *Конической*, или *неотрицательной*, *комбинацией* заданных векторов $p_1, p_2, \ldots, p_s$ называется вектор

$$p = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i, \quad \text{где} \quad \alpha_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Конической оболочкой $\operatorname{Cone} M$ множества векторов M называется множество всех их неотрицательных комбинаций. Доказать выпуклость множества $\operatorname{Cone} M$.

1.4. Дать геометрическую интерпретацию множествам $\operatorname{Aff} M$, $\operatorname{Cone} M$, $\operatorname{Conv} M$, если $M = \{p_1, \ldots, p_s\}$, $p_i \in \mathbf{R}^n$ $(i = 1, \ldots, s)$ и $1 \leq s \leq 4$, $1 \leq n \leq 3$.

1.5. Пусть A — квадратная невырожденная $(n \times n)$-матрица, q — вектор-столбец высоты n. Отображение, ставящее в соответствие каждому вектору x из $\mathbf{R}^n$ вектор $Ax + q$, называется *аффинным преобразованием* пространства $\mathbf{R}^n$. Доказать, что при аффинном преобразовании выпуклое множество переходит в выпуклое множество. Обобщить на случай прямоугольной матрицы A.

1.6. Пусть Y и Z — множества точек. Их *суммой* называется множество

$$Y + Z = \{x : \ x = y + z, \ y \in Y, \ z \in Z\}.$$

Доказать, что сумма выпуклых множеств есть выпуклое множество.

1.7. Пусть D — симметричная положительно определенная матрица. Доказать выпуклость *эллипсоида* $\{x : x^\top D x \leq 1\}$. Указание: использовать задачу 1.5 и утверждение 1.9.

1.8. Доказать, что сумма выпуклых функций — выпукла. Верно ли это для произведения выпуклых функций?

1.9. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция. Выпукла ли функция $|f(x)|$?

1.10. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция. Является ли выпуклым множество $\{x : f(x) \geq \alpha\}$?

1.11. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — выпуклые функции. Можно ли утверждать, что функции $\min\{f(x), g(x)\}$ и $\max\{f(x), g(x)\}$ выпуклы?

1.12. Доказать, что множество всех оптимальных точек задачи выпуклого программирования выпукло.

1.13. Показать оптимальность точки $(0, 0)^\top$ для задачи:

$$\max(x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 0, \\ 0 \le x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

1.14. Решить ЗЛП

$$\max(c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n)$$

$$\begin{cases} a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \le b, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

где

$$c_j > 0, \quad a_j > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad b > 0. \tag{14}$$

Сколько арифметических операций достаточно выполнить для нахождения оптимального вектора? Что изменится, если входные данные не удовлетворяют условиям (14)?

1.15. В условиях примера 1.22 правительство решило компенсировать повышение цены на картофель путем надбавок к зарплате, пособий и т. п. Пусть в результате этой компенсации ирландец на питание в среднем может тратить 16 ирландских фунтов. Покажите, что и при этом потребление картофеля увеличится.

Глава 2

Симплекс-метод

2.1. Числовой пример

Пример 2.1. Рассмотрим ЗЛП

$$\max(2x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 32, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 17, \\ x_1 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 5). \end{cases} \tag{15}$$

Для ее решения введем новую переменную

$$x_0 = 2x_1 + x_2.$$

Задача теперь заключается в максимизации линейной функции x_0 при ограничениях

$$\begin{cases} x_0 - 2x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 32, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 17, \\ \boxed{x_1} + x_5 = 5, \end{cases} \tag{16}$$

и требованиях неотрицательности:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 5). \tag{17}$$

Роль переменной, помещенной в рамку, будет ясна в дальнейшем.

В системе линейных уравнений (16) уже выделены *базисные* (*связанные*) переменные x_0, x_3, x_4, x_5 и *небазисные* (*свободные*) переменные x_1, x_2. Выразим базисные переменные через небазисные:

$$\begin{cases} x_0 = 2x_1 + x_2, \\ x_3 = 32 - 3x_1 - 4x_2, \\ x_4 = 17 - 3x_1 - x_2, \\ x_5 = 5 - x_1. \end{cases} \tag{18}$$

Обратим небазисные переменные в нуль, тогда по формулам (18) получим частное решение $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_5)^\top = (0, 0, 32, 17, 5)^\top$ системы ограничений исходной задачи и значение целевой функции $\widetilde{x}_0 = 0$. Заметим, что это решение удовлетворяет требованиям неотрицательности (17) (это произошло из-за того, что правая часть в системе (16) неотрицательна). Таким образом, $\widetilde{x}$ — это допустимый вектор задачи (15).

Этот вектор не является оптимальным. Действительно, в выражение для x_0 в (18) переменные x_1 и x_2 входят с неотрицательными коэффициентами, поэтому значение целевой функции x_0 можно увеличить за счет увеличения x_1 и/или x_2. Увеличивая x_1 и/или x_2, мы, конечно, должны соблюсти условия (16), (17).

Попробуем увеличить x_0 увеличивая x_1, оставляя x_2 равным 0 и соблюдая ограничения (16) или эквивалентные им равенства (18). Выражение для x_3 в (18) позволяет увеличить x_1 до $32/3$ (напомним, что $x_3 \geq 0$). Из тех же соображений выражение для x_4 в (18) позволяет увеличить x_1 до $17/3$, а выражение для x_5 позволяет увеличить x_1 до 5. Так как

$$\min\left\{\frac{32}{3}, \frac{17}{3}, 5\right\} = 5,$$

то на данном этапе x_1 может принять лишь значение 5.

Итак, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. Значения остальных переменных можно получить по формулам (18): $x_0 = 10$, $x_3 = 17$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$. Мы получили допустимый вектор и значение целевой функции на нем:

$$\widetilde{x} = (5, 0, 17, 2, 0)^\top, \quad \widetilde{x}_0 = 10. \tag{19}$$

Те же значения можно получить иным способом. Подставляя выражение для $x_1 = 5 - x_5$ из (18) в уравнения (16) и приводя подобные,

получим новую систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_0 - x_2 + 2x_5 = 10, \\ 4x_2 + x_3 - 3x_5 = 17, \\ \boxed{x_2} + x_4 - 3x_5 = 2, \\ x_1 + x_5 = 5. \end{cases} \tag{20}$$

Конечно, более легкий (и грамотный) способ получения системы (20) из (16) состоит в применении одного шага гауссова исключения с ведущим (направляющим) элементом $\boxed{x_1}$. Теперь базисными переменными в (20) являются x_0, x_1, x_3, x_4, а небазисными — x_2, x_5. Как и раньше, выразим базисные переменные через небазисные. Получим:

$$\begin{cases} x_0 = 10 + x_2 - 2x_5, \\ x_3 = 17 - 4x_2 + 3x_5, \\ x_4 = 2 - x_2 + 3x_5, \\ x_1 = 5 - x_5. \end{cases} \tag{21}$$

Полагая небазисные переменные равными нулю, по формулам (21) получим тот же допустимый вектор и то же значение целевой функции, что и в (19).

В выражении x_0 через x_2 и x_5 из (21) переменная x_2 входит с положительным коэффициентом, поэтому значение x_0 может быть увеличено за счет увеличения x_2 до величины

$$\min\left\{\frac{17}{4}, 2\right\} = 2.$$

Чтобы получить новый допустимый вектор, сразу от системы (20) с помощью шага исключения Гаусса с ведущим элементом, заключенным в рамку, перейдем к системе

$$\begin{cases} x_0 + x_4 - x_5 = 12, \\ x_3 - 4x_4 + \boxed{9x_5} = 9, \\ x_2 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ x_1 + x_5 = 5, \end{cases} \tag{22}$$

откуда

$$\begin{cases} x_0 = 12 - x_4 + x_5, \\ x_3 = 9 + 4x_4 - 9x_5, \\ x_2 = 2 - x_4 + 3x_5, \\ x_1 = 5 - x_5. \end{cases} \tag{23}$$

Полагая небазисные переменные x_4, x_5 равными 0, получим новый допустимый вектор и значение целевой функции:

$$\widetilde{x} = (5, 2, 9, 0, 0)^{\top}, \quad \widetilde{x}_0 = 12.$$

Анализируя (23), приходим к выводу, что значение x_0 может быть еще увеличено за счет увеличения x_5 до величины, равной

$$\min\{1, 5\} = 1.$$

Делая в (22) шаг исключения Гаусса над элементом, заключенным в рамку, получим новую систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_0 & & & {}^1\!/_9\, x_3 + {}^5\!/_9\, x_4 & & = 13, \\ & & & {}^1\!/_9\, x_3 - {}^4\!/_9\, x_4 + x_5 & & = 1, \\ & & x_2 & + {}^1\!/_3\, x_3 - {}^1\!/_3\, x_4 & & = 5, \\ & x_1 & & - {}^1\!/_9\, x_3 + {}^4\!/_9\, x_4 & & = 4, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_0 = 13 - {}^1\!/_9\, x_3 - {}^5\!/_9\, x_4, \\ x_5 = 1 - {}^1\!/_9\, x_3 + {}^4\!/_9\, x_4, \\ x_2 = 5 - {}^1\!/_3\, x_3 + {}^1\!/_3\, x_4, \\ x_1 = 4 + {}^1\!/_9\, x_3 - {}^4\!/_9\, x_4. \end{cases} \tag{24}$$

Полагая небазисные переменные x_3, x_4 равными 0, получим новый допустимый вектор и значение целевой функции:

$$\widehat{x} = (4, 5, 0, 0, 1), \quad \widehat{x}_0 = 13.$$

В выражении для x_0 из (24) переменные x_3 и x_4 входят с отрицательными коэффициентами, поэтому, так как $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, то $x_0 \leq 13$. Итак, значение целевой функции на любом допустимом векторе не больше 13 и на векторе $\widehat{x}$ значение 13 достигается, следовательно, этот вектор оптимальный.

Метод, с помощью которого мы решили данную задачу, носит название *симплекс-метод*. Перейдем к его общему описанию.

2.2. Симплекс-метод в строчечной форме

Рассмотрим каноническую ЗЛП (9). Воспользуемся матричной формой ее записи:

$$\max cx$$
$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{25}$$

Определение 2.2. Максимальная линейно независимая система столбцов матрицы называется ее (*столбцовой*) *базой*.

Пусть ранг матрицы A равен числу ее строк m. В этом случае множество столбцов образует базу тогда и только тогда, когда матрица B, составленная из этих столбцов, квадратная и невырожденная, т. е. $\det B \neq 0$. Если это так, то матрица B называется *базисной подматрицей*.

Определение 2.3. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_m$ — номера столбцов матрицы A, составляющих некоторую базу. Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ называются *базисными* переменными системы $Ax = b$.

Обозначим

$$\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$$

упорядоченный набор номеров базисных переменных. Для краткости $\mathscr{B}$ также будем называть *базой*.

Из курса линейной алгебры хорошо известно, что с помощью элементарных преобразований систему уравнений можно привести к упрощенному эквивалентному виду, в котором базисная переменная x_{j_i} встречается только в i-м уравнении ($j_i \in \mathscr{B}$) и, следовательно, может быть выражена через небазисные. Положив все небазисные переменные равными 0, получим некоторые значения базисных переменных, удовлетворяющих системе.

Определение 2.4. Решение x системы уравнений $Ax = b$, в котором все небазисные переменные равны нулю, называется *опорным вектором*, или *базисным решением*, соответствующим базе $\mathscr{B}$. Если все компоненты опорного вектора неотрицательны, то он называется *допустимым опорным вектором* , *допустимым базисным решением*, или *опорным планом*, при этом сама база $\mathscr{B}$ также называется *допустимой*.

Пусть система уравнений приведена к упрощенному виду

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j = q_{i0} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),\\ \text{где} \quad q_{ij_i} = 1, \quad q_{kj_i} = 0 \quad (j_i \in \mathscr{B}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i\}).\end{gathered} \tag{26}$$

Введем новую переменную x_0 и дополнительное ограничение

$$x_0 - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0.$$

Вычитая кратные уравнений (26), избавимся в нем от базисных переменных. Получим эквивалентное ограничение

$$x_0 + q_{01}x_1 + q_{02}x_2 + \ldots + q_{0n}x_n = q_{00}, \quad \text{где} \quad q_{0j_i} = 0 \quad (j_i \in \mathscr{B}). \tag{27}$$

Итак, задача максимизации x_0 при ограничениях (26), (27) эквивалентна исходной задаче.

Пусть, например, $\mathscr{B} = \langle 1, 2, \ldots, m\rangle$, тогда ограничения (26), (27) имеют вид

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_0 & & + q_{0,m+1}x_{m+1} & + \ldots + q_{0n}x_n & = q_{00},\\ \quad x_1 & & + q_{1,m+1}x_{m+1} & + \ldots + q_{1n}x_n & = q_{10},\\ \quad\quad x_2 & & + q_{2,m+1}x_{m+1} & + \ldots + q_{2n}x_n & = q_{20},\\ \quad\quad\quad \ddots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \quad\quad\quad\quad x_m & + q_{m,m+1}x_{m+1} & + \ldots + q_{mn}x_n & = q_{m0}, & \end{array}\right.$$

и текущий опорный вектор есть $\widetilde{x} = (q_{10}, \ldots, q_{m0}, 0, \ldots, 0)^\top$.

Определение 2.5. Матрица $Q = (q_{ij})$ $(i = 0, 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, n)$[1], составленная из коэффициентов системы (26), (27), называется (*строчечной*) *симплекс-таблицей*, соответствующей базе $\mathscr{B}$. Симплекс-таблица называется (*прямо*) *допустимой*, если $q_{i0} \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Определение 2.6. Элементы $-q_{0j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ нулевой строки симплекс-таблицы Q называются *относительными оценками*. Вектор $\widehat{c} = -(q_{01}, q_{02}, \ldots, q_{0n})$ называется *вектором относительных оценок*.

[1]Обратим внимание, что нумерация строк и столбцов симплекс-таблицы начинается с нуля. Строку и столбец с номером 0 мы будем называть нулевыми. В отличие от них строки и столбцы, заполненные нулями, будем называть 0-строками и 0-столбцами.

Заметим, что по базе $\mathscr{B}$ таблица Q определяется единственным образом (напомним, что порядок следования элементов в $\mathscr{B}$ фиксирован).

Упражнение 2.7. Что произойдет с таблицей Q, если в $\mathscr{B}$ переставить некоторые элементы? Показать, в частности, что при этом текущий опорный вектор, а значит, и q_{00} не изменится.

Очевидно следующее

Утверждение 2.8. *Пусть опорный вектор* $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)^\top$ *и симплекс-таблица* $Q = (q_{ij})$ *соответствуют базе* $\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$, *тогда*

1) $\widetilde{x}_{j_i} = q_{i0}$, *если* $j_i \in \mathscr{B}$, *и* $\widetilde{x}_j = 0$, *если* $j \notin \mathscr{B}$;

2) *значение целевой функции на векторе* $\widetilde{x}$ *равно* $c\widetilde{x} = q_{00}$;

3) *симплекс-таблица* Q *допустима тогда и только тогда, когда база* $\mathscr{B}$ *допустима.*

Определение 2.9. Базы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}'$ называются *соседними*, если $|\mathscr{B} \cap \mathscr{B}'| = m - 1$.

Симплекс-метод переходит от одной допустимой базы к соседней допустимой базе, при этом не уменьшая значение целевой функции на текущем опорном векторе, до тех пор, пока не найдет оптимального вектора. Симплекс-метод был разработан Дж. Данцигом в 1947 г. Предшественниками этого алгоритма были методы, предложенные Ж. Фурье[2] в 1823 г. и Валле Пуссеном[3] в 1911 г. Об основополагающей роли Л.В. Канторовича сказано ранее.

Алгоритм 1. Прямой симплекс-метод в строчечной форме[4]

Шаг 0. Начать с допустимой базы[5] $\mathscr{B}$ и соответствующей ей допустимой таблицы Q.

[2]Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) — французский математик и физик.

[3]Шарль Жан Ла Валле Пуссен (1866–1962) — бельгийский математик.

[4]Заметим, что описываемая процедура не выдерживает требований, обычно предъявляемых к алгоритму: не все действия заданы однозначно. Таким образом, речь идет не об одном алгоритме, а об их семействе. В дальнейшем неоднозначности будут конкретизироваться. Данное замечание относится ко многим процедурам, описанным в пособии.

[5]Способы построения начальной допустимой базы рассматриваются в разделе 2.4.

Шаг 1. Если $q_{0j} \geq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) — конец. Опорный вектор, соответствующий базе $\mathscr{B}$, оптимален. Иначе выбрать такое s, что $q_{0s} < 0$.

Шаг 2. Если $q_{is} \leq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) — конец. Значение целевой функции на множестве допустимых векторов неограничено. Иначе выбрать такое r, что

$$\frac{q_{r0}}{q_{rs}} = \min \left\{ \frac{q_{i0}}{q_{is}} : \quad q_{is} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \right\}. \tag{28}$$

Шаг 3 (шаг гауссова преобразования). Поделить r-ю строку матрицы Q на q_{rs}. Для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, m\} \setminus \{r\}$ вычесть из i-й строки r-ю, умноженную на q_{is}.

Шаг 4. В $\mathscr{B} = \langle j_1, \ldots, j_m \rangle$ в качестве j_r взять s. Вернуться на шаг 1.

Заметим, что выбор s и r по приведенным в алгоритме правилам в общем случае неоднозначен. Правила выбора уточняются в разделе 2.3.

Определение 2.10. Переход от текущей базы к соседней в алгоритме 1 называется *итерацией* симплекс-метода. Столбец s, строка r и элемент q_{rs} в симплекс-методе называются *направляющими*, или *ведущими*.

Заметим, что шаг 3 симплекс-метода представляет собой одну итерацию гауссова исключения в системе (26), (27) с направляющим (ведущим) элементом q_{rs}.

Определение 2.11. База $\mathscr{B}$ и соответствующий опорный вектор $\widetilde{x}$ называются *невырожденными*, если среди базисных компонент $\widetilde{x}$ нет нулей. В противном случае $\mathscr{B}$ и $\widetilde{x}$ называются *вырожденными*. ЗЛП в форме (25) называется *невырожденной*, если все ее допустимые базы являются невырожденными. В противном случае ЗЛП называется вырожденной.

Утверждение 2.12.

1) *Преобразования шага* 3 *алгоритма* 1 *не меняют множества решений системы* (26). *Эти преобразования заменяют базисную переменную* x_{j_r} *на* x_s.

2) *На каждой итерации алгоритма* 1 *таблица* Q *остается допустимой.*

3) *Если* $q_{0j} \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$*, то текущий опорный вектор оптимален.*

4) *Если для некоторого* $s > 0$ *справедливо* $q_{0s} < 0$ *и* $q_{is} \leq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$*, то значение целевой функции на множестве допустимых векторов неограничено сверху.*

5) *Если* $q_{0s} < 0$ *и* $q_{rs} > 0$*, то при переходе к следующей базе значение целевой функции не уменьшается. Если, кроме того, база невырождена, то значение целевой функции строго увеличивается.*

Доказательство.

Утверждение 1) легко проверяется.

2) Элементы нулевого столбца симплекс-таблицы изменяются по формулам:

$$q'_{i0} = q_{i0} - \frac{q_{is}}{q_{rs}} q_{r0} \quad (i = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m), \quad q'_{r0} = \frac{q_{r0}}{q_{rs}}.$$

В силу равенства (28) справедливо $q'_{i0} \geq 0$.

3) Так как $x_j \geq 0$ и $q_{0j} \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то из (27) получаем, что $x_0 \leq q_{00}$. С другой стороны, текущий опорный вектор $\widetilde{x}$ дает значение целевой функции, равное q_{00}, следовательно, $\widetilde{x}$ — оптимален.

4) В системе (26), (27) положим все небазисные переменные, кроме x_s, равными нулю. Тогда получим

$$\begin{cases} x_0 = q_{00} - q_{0s} x_s, \\ x_{j_1} = q_{10} - q_{1s} x_s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{j_m} = q_{m0} - q_{ms} x_s. \end{cases}$$

Так как $q_{i0} \geq 0$, $q_{0s} < 0$ и $q_{is} \leq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то при любом положительном x_s по этим формулам можно найти допустимый вектор, причем при неограниченном увеличении x_s значение целевой функции x_0 неограниченно возрастает.

5) При преобразованиях шага 3 симплекс-алгоритма значение целевой функции пересчитывается по формулам

$$q'_{00} = q_{00} - \frac{q_{0s}}{q_{rs}} q_{r0}.$$

Так как $q_{0s} < 0$, $q_{rs} > 0$, $q_{r0} \geq 0$, то $q'_{00} \geq q_{00}$. Если текущая база невырождена, то $q_{r0} > 0$ и поэтому $q'_{00} > q_{00}$. ∎

Определение 2.13. Допустимая симплекс-таблица Q, в которой $q_{0j} \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ называется *оптимальной*.

Пример 2.14. Решим строчечным симплекс-методом ЗЛП

$$\max(2x_2 - x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, 4). \end{cases}$$

В качестве начальной допустимой базы можно взять $\mathscr{B}^{(0)} = \langle 3, 4 \rangle$. Рассмотрим таблицу

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ \hline 6 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Вычитая из нулевой строки первую и прибавляя вторую, получим следующую начальную симплекс-таблицу:

$$\mathscr{B}^{(0)} \langle 3, 4 \rangle, \qquad Q^{(0)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 6 & \boxed{2} & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

В качестве номера направляющего столбца можно выбрать $s = 1$ или $s = 2$. Пусть $s = 1$. Так как $\min\{{}^6\!/_2, {}^6\!/_1\}$ достигается на первом элементе, то в качестве направляющей строки берем строку с номером $r = 1$. Таким

образом, очередная база равна $\mathscr{B}^{(1)} = \langle 1, 4 \rangle$. Разделим первую строку на 2 и прибавим ее к нулевой строке, а затем вычтем из второй. Получаем:

$$\mathscr{B}^{(1)} = \langle 1, 4 \rangle, \qquad Q^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 3 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 0 & \boxed{3/2} & -1/2 & 1 \end{array}\right).$$

Наличие отрицательного элемента в нулевой строке заставляет продолжить процесс. Теперь $s = 2$ и $r = 2$ находятся однозначно. Следовательно, $\mathscr{B}^{(2)} = \langle 1, 2 \rangle$. В результате элементарных преобразований получим:

$$\mathscr{B}^{(2)} = \langle 1, 2 \rangle, \qquad Q^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 4 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 2 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right).$$

Таблица оптимальна. Оптимальный вектор равен $(2, 2, 0, 0)^\top$. Оптимальное значение целевой функции равно 4.

Перейдем к вопросу о конечности симплекс-метода. Вначале рассмотрим невырожденную ЗЛП. Полностью вопрос о конечности симплекс-метода будет решен в разделе 2.3.

Теорема 2.15. *Симплекс-метод, примененный к невырожденной ЗЛП, конечен, т. е. завершается за конечное число итераций.*

Доказательство. По пункту 5) утверждения 2.12 значение целевой функции невырожденной ЗЛП на каждой итерации строго увеличивается. Следовательно, базы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}'$, соответствующие различным итерациям, составляют два различных m-элементных подмножества n-элементного множества. Таким образом, число итераций не превосходит

$$\frac{n!}{(n-m)!\, m!},$$

следовательно, в условиях теоремы симплекс-метод конечен. ∎

Итак, симплекс-метод — это направленный перебор баз. В вычислительном отношении можно использовать метод Гаусса со специальным выбором направляющего элемента, обеспечивающим этот перебор.

2.3. Зацикливание и способы защиты от него

2.3.1. Зацикливание

Выбор столбца, вводимого в базу, и столбца, выводимого из базы, в симплекс-методе определен, вообще говоря, неоднозначно. Желательно конкретизировать этот выбор так, чтобы любая ЗЛП решалась как можно быстрее. Однако надеяться на точное решение такой «сверхзадачи» трудно, и поэтому приходится использовать такие приемы, от которых требуется, чтобы, во-первых, любая ЗЛП решалась за конечное число итераций, и во-вторых, это число итераций по каким-то эвристическим соображениям[6] было «не очень большим» хотя бы в большинстве случаев.

Пусть $Q = (q_{ij})$ — симплекс-таблица, соответствующая допустимой базе $\mathscr{B}$. Обычно применяется один из следующих критериев для выбора номера s направляющего столбца (шаг 1 алгоритма 1):

α_1 Выбрать $s = \min\{j : q_{0j} < 0\}$.

α_2 Выбрать s, такое, что $q_{0s} = \min\{q_{0j} : q_{0j} < 0\}$. Если таких s несколько, то выбрать среди них наименьшее.

α_3 Выбрать s, такое, что $\theta_s = \max\{\theta_j : q_{0j} < 0\}$, где

$$\theta_j = \min\left\{\frac{q_{i0}}{q_{ij}} : \quad q_{ij} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Если таких s несколько, то выбрать среди них наименьшее.

Первый из этих критериев — самый простой. Третий дает наибольшее увеличение целевой функции за одну итерацию симплекс-метода. Второй занимает промежуточное положение между первым и третьим. Он обещает наибольшее увеличение целевой функции при увеличении x_s на 1.

Если номер s направляющего столбца выбран, то простое правило выбора номера r направляющей строки (шаг 2 алгоритма 1) можно сформулировать так:

[6] Используемые в алгоритмах правила, не имеющие теоретического обоснования своей эффективности, но дающие хорошие результаты на практике, называются *эвристиками*.

β_1 Среди индексов i, на которых достигается минимум

$$\min\left\{\frac{q_{i0}}{q_{is}}:\quad q_{is}>0\quad (i=1,2,\ldots,m)\right\}, \tag{29}$$

выбрать наименьший.

Пример 2.16. Начиная с допустимой базы $\{2,1,3,4\}$ применить симплекс-метод с критериями α_1 и β_1 к ЗЛП

$$\max\{200x_5+175x_6-1100x_7-2x_8\}$$

$$\begin{cases} x_2-3x_5-{}^5\!/_4\,x_6+7x_7+{}^1\!/_{50}\,x_8=0,\\ x_1+{}^1\!/_3\,x_5+{}^1\!/_6\,x_6-x_7-{}^1\!/_{150}\,x_8=0,\\ x_3+{}^{75}\!/_2\,x_5-{}^{25}\!/_4\,x_6+{}^{175}\!/_2\,x_7+{}^1\!/_4\,x_8=0,\\ x_4+x_8=1,\\ x_j\ge 0\quad (j=1,2,\ldots,8). \end{cases}$$

Процесс решения опишем последовательностью симплекс-таблиц, помечая направляющий элемент и выписывая номера базисных переменных на каждой итерации.

$$\mathscr{B}^{(0)}=\langle 2,1,3,4\rangle,$$

$$Q^{(0)}=\left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & -175 & 1100 & 2\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -{}^5\!/_4 & 7 & {}^1\!/_{50}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{{}^1\!/_3} & {}^1\!/_6 & -1 & -{}^1\!/_{150}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & {}^{75}\!/_2 & -{}^{25}\!/_4 & {}^{175}\!/_2 & {}^1\!/_4\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(1)} = \langle 2, 5, 3, 4 \rangle,$$

$$Q^{(1)} = \left(\begin{array}{c|ccccccc} 0 & 600 & 0 & 0 & 0 & 0 & -75 & 500 & -2 \\ \hline 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1/4} & -2 & -1/25 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -3 & -1/50 \\ 0 & -225/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -25 & 200 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(2)} = \langle 6, 5, 3, 4 \rangle,$$

$$Q^{(2)} = \left(\begin{array}{c|ccccccc} 0 & 3300 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & -14 \\ \hline 0 & 36 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -4/25 \\ 0 & -15 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 3/50 \\ 0 & 1575/2 & 100 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(3)} = \langle 6, 7, 3, 4 \rangle,$$

$$Q^{(3)} = \left(\begin{array}{c|ccccccc} 0 & 1800 & 100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & -8 \\ \hline 0 & -84 & -12 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & \boxed{8/25} \\ 0 & -15 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3/50 \\ 0 & 1575/2 & 100 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(4)} = \langle 8, 7, 3, 4 \rangle,$$

$$Q^{(4)} = \left(\begin{array}{c|ccccccc} 0 & -300 & -200 & 0 & 0 & 300 & 25 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -525/2 & -75/2 & 0 & 0 & 25 & 25/8 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{3/4} & 1/4 & 0 & 0 & -1/2 & -3/16 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25/2 & 1 & 0 & 75 & 75/8 & 0 & 0 \\ 1 & 525/2 & 75/2 & 0 & 1 & -25 & -25/8 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(5)} = \langle 8, 1, 3, 4 \rangle,$$

$$Q^{(5)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & -100 & 0 & 0 & 100 & -50 & 400 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{50} & 0 & 0 & -150 & -125/2 & 350 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & -2/3 & -1/4 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -25/2 & 1 & 0 & 75 & 75/8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -50 & 0 & 1 & 150 & 125/2 & -350 & 0 \end{array}\right).$$

Далее $\mathscr{B}^{(6)} = \mathscr{B}^{(0)}$ и, следовательно, произошло так называемое *зацикливание* и процесс бесконечен. В следующей таблице для каждой итерации приведены значения $\mathscr{B}$, s, I, r. Через I обозначено множество тех i, для которых достигается минимум в (29).

№	$\mathscr{B}$	s	I	r
0	$\langle 2, 1, 3, 4 \rangle$	5	$\{2, 3\}$	2
1	$\langle 2, 5, 3, 4 \rangle$	6	$\{1, 2\}$	1
2	$\langle 6, 5, 3, 4 \rangle$	7	$\{2\}$	2
3	$\langle 6, 7, 3, 4 \rangle$	8	$\{1, 2\}$	1
4	$\langle 8, 7, 3, 4 \rangle$	1	$\{2\}$	2
5	$\langle 8, 1, 3, 4 \rangle$	2	$\{1, 2\}$	1
6	$\langle 2, 1, 3, 4 \rangle$			

Не спасает и использование других критериев α_2 и α_3 выбора s, так как в рассматриваемом примере они приводят к одному и тому же результату.

Замечание 2.17. Предположим, что вычислительный процесс бесконечен. Поскольку число баз конечно, то, начиная с некоторой итерации, произойдет *зацикливание*, т. е. начнется повторение баз:

$$\mathscr{B}^{(k)}, \mathscr{B}^{(k+1)}, \ldots, \mathscr{B}^{(k+l)} = \mathscr{B}^{(k)}.$$

Так как значение целевой функции на текущем опорном векторе в симплекс-методе не убывает, то зацикливание может произойти, только если элемент q_{00} симплекс-таблицы не изменяется. Это означает, что задача вырождена, а именно $q_{r0} = 0$, где r — номер направляющей строки.

Отсюда получаем, что если зацикливание произошло, то весь нулевой столбец симплекс-таблицы не изменяется, и, следовательно, всем этим базам соответствует один и тот же допустимый опорный вектор.

Вычислительные процедуры, гарантирующие от зацикливания, разобраны ниже.

2.3.2. Лексикографический метод

Определение 2.18. Говорят, что вектор q *лексикографически положителен* (обозначение: $q \succ 0$), если $q \neq 0$ и его первая отличная от нуля компонента положительна. Пусть векторы p и q имеют одинаковую размерность. Вектор q *лексикографически больше* вектора p (обозначение: $q \succ p$), если $q - p \succ 0$.

Определение 2.19. Пусть $\mathscr{R}$ — конечное множество векторов одинаковой размерности. Вектор q назовем *лексикографически минимальным* (обозначение: $q = \operatorname{lexmin} \mathscr{R}$), если для всякого $p \in \mathscr{R}$, $p \neq q$, справедливо $p \succ q$.

Сформулируем *лексикографический критерий* выбора номера r направляющей строки на шаге 2 алгоритма 1:

β_2 Выбрать r, такое, что

$$\left(\frac{q_{r0}}{q_{rs}}, \frac{q_{r1}}{q_{rs}}, \ldots, \frac{q_{rn}}{q_{rs}}\right) = \operatorname{lexmin}\left\{\left(\frac{q_{i0}}{q_{is}}, \frac{q_{i1}}{q_{is}}, \ldots, \frac{q_{in}}{q_{is}}\right) : \quad q_{is} > 0\right\}.$$

Так как матрица Q не содержит пропорциональных строк, то выбор r по критерию β_2 определен однозначно.

Определение 2.20. Симплекс-таблица Q называется *лексикографически допустимой*, или $\mathscr{L}$*-допустимой*, если все ее строки, кроме, быть может, нулевой, лексикографически положительны.

Заметим, что с помощью перестановки столбцов (вместе с соответствующим переименованием переменных) и/или добавления искусственных переменных из любой симплекс-таблицы можно получить лексикографически допустимую.

Лемма 2.21. *Пусть симплекс-таблица лексикографически допустима. Если на шаге* 2 *алгоритма* 1 *для выбора направляющей строки используется критерий* β_2*, то свойство лексикографической допустимости таблицы сохраняется.*

Доказательство. Очевидно, что r-я (направляющая) строка остается лексикографически положительной, в то время как i-я строка ($i = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m$), заменяется на строку

$$(q_{i0}, q_{i1}, \ldots, q_{in}) - q_{is} \cdot \left(\frac{q_{r0}}{q_{rs}}, \frac{q_{r1}}{q_{rs}}, \ldots, \frac{q_{rn}}{q_{rs}} \right). \tag{30}$$

Если $q_{is} \leq 0$, то к лексикографически положительной строке прибавляется лексикографически положительная или 0, поэтому результат лексикографически положителен. Если $q_{is} > 0$, то запишем (30) как

$$q_{is} \cdot \left[\left(\frac{q_{i0}}{q_{is}}, \frac{q_{i1}}{q_{is}}, \ldots, \frac{q_{in}}{q_{is}} \right) - \left(\frac{q_{r0}}{q_{rs}}, \frac{q_{r1}}{q_{rs}}, \ldots, \frac{q_{rn}}{q_{rs}} \right) \right].$$

В квадратных скобках стоит лексикографически положительный вектор (так как используется правило β_2), который умножается на положительное число. Результат лексикографически положителен. ∎

Определение 2.22. Алгоритм 1, в котором номер s направляющего столбца выбирается произвольно, но так, что $q_{0s} < 0$, а номер r направляющей строки выбирается по критерию β_2, называется *лексикографическим симплекс-методом* в строчечной форме, или $\mathscr{L}$*-методом*.

Теорема 2.23. *$\mathscr{L}$-метод, примененный к лексикографически допустимой таблице, конечен.*

Доказательство. По лемме 2.21 все таблицы, появляющиеся в $\mathscr{L}$-методе, являются лексикографически допустимыми. На каждой итерации к нулевой строке прибавляется лексикографически положительная строка. Таким образом, при переходе от базы к базе происходит лексикографическое увеличение нулевой строки симплекс-таблицы, и, следовательно, зацикливание невозможно. ∎

Пример 2.24. Проиллюстрируем лексикографический симплекс-метод на ЗЛП из примера 2.16. Будем выбирать номер направляющего элемента по критериям α_1, β_2. Начальная база равна $\mathscr{B}^{(0)} = \langle 2, 1, 3, 4 \rangle$.

$$\mathscr{B}^{(1)} = \langle 2, 1, 5, 4 \rangle,$$

$$Q^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 16/3 & 0 & 0 & -625/3 & 4700/3 & 10/3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2/25 & 0 & 0 & -7/4 & 14 & 1/25 \\ 0 & 1 & 0 & -2/225 & 0 & 0 & \boxed{2/9} & -16/9 & -2/225 \\ 0 & 0 & 0 & 2/75 & 0 & 1 & -1/6 & 7/3 & 1/150 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(2)} = \langle 2, 6, 5, 4 \rangle,$$

$$Q^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 1875/2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & -100 & -5 \\ \hline 0 & 63/8 & 1 & 1/100 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/100 \\ 0 & 9/2 & 0 & -1/25 & 0 & 0 & 1 & -8 & -1/25 \\ 0 & 3/4 & 0 & \boxed{1/50} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(3)} = \langle 2, 6, 3, 4 \rangle,$$

$$Q^{(3)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 1050 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 50 & -5 \\ \hline 0 & 15/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & -3/100 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -6 & -1/25 \\ 0 & 75/2 & 0 & 1 & 0 & 50 & 0 & 50 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(4)} = \langle 2, 6, 3, 8 \rangle,$$

$$Q^{(4)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 5 & 1050 & 0 & 0 & 5 & 150 & 0 & 50 & 0 \\ \hline 3/100 & 15/2 & 1 & 0 & 3/100 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/25 & 6 & 0 & 0 & 1/25 & 2 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 75/2 & 0 & 1 & 0 & 50 & 0 & 50 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Итак, оптимальный вектор равен $(0, {}^{3}/_{100}, 0, 0, 0, {}^{1}/_{25}, 0, 1)^{\top}$. В следующей таблице, как и в примере 2.16, для каждой итерации приведены значения $\mathscr{B}$, s, I, r.

№	$\mathscr{B}$	s	I	r
0	$\langle 2,1,3,4\rangle$	5	$\{2,3\}$	3
1	$\langle 2,1,5,4\rangle$	6	$\{2\}$	2
2	$\langle 2,6,5,4\rangle$	3	$\{1,3\}$	3
3	$\langle 2,6,3,4\rangle$	8	$\{4\}$	4
4	$\langle 2,6,3,8\rangle$			

2.3.3. Правило Бленда

Пусть, как обычно, s и r — номера направляющих столбца и строки соответственно. Напомним, что s совпадает с номером переменной, вводимой в базу, а j_r равен номеру переменной, выводимой из базы, где $\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m\rangle$. Сформулируем следующий критерий выбора номера r направляющей строки:

β_3 Среди индексов i, на которых достигается минимум

$$\min\left\{\frac{q_{i0}}{q_{is}}:\quad q_{is} > 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m)\right\},$$

выбрать r, для которого j_r минимально.

Определение 2.25. Симплекс-метод, в котором номер направляющего столбца выбирается по правилу α_1, а номер направляющей строки — по правилу β_3, называется *симплекс-методом с правилом Бленда*[7].

Замечание 2.26. Правило Бленда можно также сформулировать следующим образом:

1) Из переменных, вводимых в базу, выбери переменную с наименьшим номером.

2) Из переменных, выводимых из базы, выбери переменную с наименьшим номером.

[7] Роберт Гэри Бленд — американский математик.

Теорема 2.27. *Симплекс-метод с правилом Бленда конечен.*

Доказательство. Предположим, что зацикливание произошло. Среди всех номеров, которые во время цикла исключались из базы (и, следовательно, включались в базу), найдем максимальный и обозначим его t. Пусть t был исключен из базы на h-й итерации и включен в базу на g-й итерации. Обозначим через s номер, вводимый в базу на h-й итерации. Имеем $s < t$. Обозначим $\mathscr{B} = \langle j_1, \ldots, j_m \rangle$, $Q = (q_{ij})$ — соответственно базу и симплекс-таблицу на h-й итерации и $\mathscr{B}'$, $Q' = (q'_{ij})$ — соответственно базу и симплекс-таблицу на g-й итерации. Заметим, что $s \notin \mathscr{B}$, $t \in \mathscr{B}$, $t \notin \mathscr{B}'$.

Определим компоненты вектора $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n)^\top$ по формулам:

$$\widehat{x}_{j_i} = q_{i0} - q_{is} \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad \widehat{x}_s = 1, \quad \widehat{x}_j = 0 \quad (j \notin \mathscr{B}, \quad j \neq s).$$

Заметим, что вектор $\widehat{x}$ не является опорным и даже допустимым, однако из рассмотрения симплекс-таблицы Q легко получить, что $\widehat{x}$ удовлетворяет системе $Ax = b$, причем

$$c\widehat{x} = q_{00} - \sum_{j=1}^{n} q_{0j}\widehat{x}_j = q_{00} - \sum_{j \notin \mathscr{B}} q_{0j}\widehat{x}_j = q_{00} - q_{0s} > q_{00}, \tag{31}$$

так как $q_{0s} < 0$. Из рассмотрения симплекс-таблицы Q' получаем:

$$c\widehat{x} = q'_{00} - \sum_{j=1}^{n} q'_{0j}\widehat{x}_j. \tag{32}$$

Согласно замечанию 2.17 имеем $q'_{00} = q_{00}$. Рассмотрим остальные слагаемые в сумме (32):

- Если $j \notin \mathscr{B}$, $j \neq s$, то $\widehat{x}_j = 0$, поэтому $q'_{0j}\widehat{x}_j = 0$.
- Если $j = s$, то $\widehat{x}_j = 1$ и, в силу правила выбора t, $q'_{0j} \geq 0$, поэтому $q'_{0j}\widehat{x}_j \geq 0$.
- Если $j \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}'$, $j \neq t$, то, в силу правила выбора t, имеем $j < t$. Из замечания 2.17 следует, что $q_{i0} = 0$, где $j = j_i$, следовательно, $\widehat{x}_j = -q_{is}$. Однако так как $j < t$, то на h-й итерации элемент q_{is} не может быть направляющим (иначе на t-й итерации из базы был бы выведен j, а не t), поэтому $q_{is} \leq 0$, откуда $\widehat{x}_j \geq 0$. С другой стороны, так как $j < t$, то $q'_{0j} \geq 0$, поэтому $q'_{0j}\widehat{x}_j \geq 0$.

- Если $j = t$, то $q'_{0j} < 0$ и $\widehat{x}_j = -q_{is}$, где $t = j_i$. На h-й итерации элемент q_{is} — направляющий, поэтому $\widehat{x}_j = -q_{is} < 0$, откуда $q'_{0j}\widehat{x}_j > 0$.

- Если $j \in \mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$, то $q_{0j} = q'_{0j} = 0$, поэтому $q'_{0j}\widehat{x}_j = 0$.

Итак, все слагаемые под знаком суммы в (32) неотрицательны, причем среди них есть положительные, поэтому $c\widehat{x} < q_{00}$, что противоречит неравенству (31). ∎

Пример 2.28. Проиллюстрируем симплекс-метод с правилом Бленда на ЗЛП из примера 2.16. Начальная база равна $\mathscr{B}^{(0)} = \langle 2, 1, 3, 4\rangle$. Далее, как и в примере 2.16, будут построены базы $\mathscr{B}^{(1)} = \langle 2, 5, 3, 4\rangle$, $\mathscr{B}^{(2)} = \langle 6, 5, 3, 4\rangle$, $\mathscr{B}^{(3)} = \langle 6, 7, 3, 4\rangle$, $\mathscr{B}^{(4)} = \langle 8, 7, 3, 4\rangle$, $\mathscr{B}^{(5)} = \langle 8, 1, 3, 4\rangle$.

Начиная с этого момента, вместе с базой будем приводить соответствующую ей симплекс-таблицу.

$$\mathscr{B}^{(6)} = \langle 8, 2, 3, 4\rangle,$$

$$Q^{(6)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 300 & 0 & 0 & 0 & -100 & -125 & 800 & 0 \\ \hline 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & -50 & -25 & 150 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3/4 & 4 & 0 \\ 0 & 75/2 & 0 & 1 & 0 & \boxed{50} & 0 & 50 & 0 \\ 1 & 150 & 0 & 0 & 1 & 50 & 25 & -150 & 0 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(7)} = \langle 8, 2, 5, 4\rangle,$$

$$Q^{(7)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 375 & 0 & 2 & 0 & 0 & -125 & 900 & 0 \\ \hline 0 & -225/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -25 & 200 & 1 \\ 0 & 9/2 & 1 & 1/25 & 0 & 0 & -3/4 & 6 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/50 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 225/2 & 0 & -1 & 1 & 0 & \boxed{25} & -200 & 0 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(8)} = \langle 8, 2, 5, 6 \rangle,$$

$$Q^{(8)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 5 & 1875/2 & 0 & -3 & 5 & 0 & 0 & -100 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3/100 & 63/8 & 1 & 1/100 & 3/100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & \boxed{1/50} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/25 & 9/2 & 0 & -1/25 & 1/25 & 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(9)} = \langle 8, 2, 5, 6 \rangle,$$

$$Q^{(9)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 5 & 1050 & 0 & 0 & 5 & 150 & 0 & 50 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3/100 & 15/2 & 1 & 0 & 3/100 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 75/2 & 0 & 1 & 0 & 50 & 0 & 50 & 0 \\ 1/25 & 6 & 0 & 0 & 1/25 & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Последняя база является оптимальной, и соответствующий ей опорный вектор равен $(0, 3/100, 0, 0, 0, 1/25, 0, 1)^\top$. В следующей таблице, как и в примере 2.16, для каждой итерации приведены значения $\mathscr{B}$, s, I, J, r, где $J = \{j_i : i \in I\}$.

№	$\mathscr{B}$	s	I	J	r
0	$\langle 2, 1, 3, 4 \rangle$	5	$\{2, 3\}$	$\{1, 3\}$	2
1	$\langle 2, 5, 3, 4 \rangle$	6	$\{1, 2\}$	$\{2, 5\}$	1
2	$\langle 6, 5, 3, 4 \rangle$	7	$\{2\}$	$\{5\}$	2
3	$\langle 6, 7, 3, 4 \rangle$	8	$\{1, 2\}$	$\{6, 7\}$	1
4	$\langle 8, 7, 3, 4 \rangle$	1	$\{2\}$	$\{7\}$	2
5	$\langle 8, 1, 3, 4 \rangle$	2	$\{1, 2\}$	$\{8, 1\}$	2
6	$\langle 8, 2, 3, 4 \rangle$	5	$\{3, 4\}$	$\{3, 4\}$	3
7	$\langle 8, 2, 5, 4 \rangle$	6	$\{4\}$	$\{4\}$	4
8	$\langle 8, 2, 5, 6 \rangle$	3	$\{3\}$	$\{5\}$	3
9	$\langle 8, 2, 7, 6 \rangle$				

2.4. Получение начального допустимого опорного вектора

В начале работы алгоритма 1 предполагается, что известна некоторая начальная допустимая база. Опишем один из способов построения такой базы, называемый *методом искусственного базиса*.

Будем считать, что в канонической ЗЛП (25) справедливо условие $b \geq 0$. Ясно, что это предположение не уменьшает общности, так как в противном случае уравнения с отрицательной правой частью умножим на -1. Мы также снимаем ограничение $\operatorname{rank} A = m$. Рассмотрим ЗЛП

$$\max(-x_{n+1} - x_{n+2} - \ldots - x_{n+m})$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ddots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m+n). \end{cases} \tag{33}$$

Неизвестные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ называются *искусственными переменными*. Так как $b_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то база $\mathscr{B} = \langle n+1, \ldots, n+m \rangle$ допустима и к задаче (33) можно применить конечный вариант симплекс-метода. Заметим, что если используется лексикографический симплекс-метод, то для получения лексикографически допустимой начальной симплекс-таблицы достаточно переставить на первые места столбцы, соответствующие искусственным переменным (с соответствующим переименованием переменных).

Пусть $\widehat{x}$ — оптимальный вектор, $\mathscr{B}$ — оптимальная база вспомогательной задачи (33), а Q — соответствующая симплекс-таблица. Возможны два случая:

I. Значение целевой функции на оптимальном векторе ЗЛП (33) отрицательно. Легко видеть, что в этом случае исходная система ограничений $Ax = b$, $x \geq 0$ несовместна.

II. Значение целевой функции на оптимальном векторе ЗЛП (33) равно 0. Система совместна. Рассмотрим два варианта:

   1) База $\mathscr{B}$ содержит только номера из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $\mathscr{B}$ является допустимой базой для исходной задачи.

2) Найдется $s \in \{n+1, \ldots, n+m\}$, такое, что $s \in \mathscr{B}$. Тогда $q_{is} = 0$ ($i = 0, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m$), $q_{rs} = 1$ для некоторого r. Так как $\widehat{x}_s = q_{r0}$, то $q_{r0} = 0$ (в противном случае $\widehat{x}_{n+1} + \ldots + \widehat{x}_{n+m} > 0$, что противоречит предположению).

   а) Если $q_{rj} = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), то, очевидно, $\operatorname{rank} A < m$ и исходная система $Ax = b$ избыточна. Вычеркнем из таблицы Q r-ю строку и s-й столбец.

   б) Если $q_{rj} \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то в таблице Q выполним один шаг гауссова исключения с направляющим элементом q_{rj}. В результате s будет исключен из $\mathscr{B}$. После этого вычеркнем из Q s-й столбец.

После операций удаления строк и столбцов, описанных в пп. 2а) и 2б), придем к ситуации п. 1).

Описанная выше схема называется *методом искусственного базиса*, или *первым этапом* (*фазой*) симплекс-метода. Метод искусственного базиса либо устанавливает, что исходная система ограничений несовместна, либо находит начальную допустимую базу, отыскивая в исходной системе все уравнения-следствия (если они есть) и тем самым сводя задачу к случаю $\operatorname{rank} A = m$.

После этого к исходной задаче применяется любой конечный вариант алгоритма 1, называемый в данном случае *вторым этапом* (*фазой*) симплекс-метода.

Заметим, что по завершении первого этапа некоторые строки симплекс-таблицы могут оказаться лексикографически отрицательными, поэтому, если используется лексикографический симплекс-метод, базисные столбцы следует переставить на первые места.

Пример 2.29. Продемонстрируем метод искусственного базиса на ЗЛП

$$\max(-x_1 - x_2 - 5x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 4). \end{cases}$$

Первый этап. По исходной задаче строим вспомогательную ЗЛП:

$$\max(-x_5 - x_6 - x_7)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 1, \\ 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 + x_7 = 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 7). \end{cases}$$

Получим следующие симплекс-таблицы:

$$\mathscr{B}^{(0)} = \langle 5, 6, 7 \rangle,$$

$$Q^{(0)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} -7 & -7 & 5 & -9 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & \boxed{5} & -4 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\mathscr{B}^{(1)} = \langle 5, 6, 1 \rangle,$$

$$Q^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & -3/5 & 4/5 & -4/5 & 0 & 0 & 7/5 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{9/5} & -12/5 & 12/5 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & -6/5 & 8/5 & -8/5 & 0 & 1 & -1/5 \\ 1 & 1 & -4/5 & 7/5 & 3/5 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right).$$

Заметим, что теперь значение целевой функции равно 0, хотя симплекс-таблица не оптимальна[8].

$$\mathscr{B}^{(2)} = \langle 2, 6, 1 \rangle,$$

$$Q^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 4/3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -4/3 & 4/3 & 5/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 & 5/3 & 4/9 & 0 & 1/9 \end{array}\right).$$

[8]Дальнейшую оптимизацию можно прекратить и приступить к исключению из базы столбцов с номерами, меньшими m.

Таблица $Q^{(2)}$ оптимальна. Так как $q_{00} = 0$, то исходная система совместна. Так как $q_{2j} = 0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, то вторая строка избыточна. Вычеркивая вторую строку и столбцы, соответствующие искусственным переменным, и приписывая коэффициенты целевой функции исходной задачи, получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -4/3 & 4/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \end{array}\right).$$

В нулевой строке избавимся от базисных переменных. Для этого вычтем из нулевой строки первую и вторую:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -4/3 & 4/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \end{array}\right).$$

Таблица уже оптимальна. Получен оптимальный вектор $(1, 0, 0, 0)^\top$ и значение целевой функции -1.

2.5. Матричное описание симплекс-метода

Рассмотрим каноническую ЗЛП (9) в матричной форме:

$$\max cx \qquad \begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{34}$$

Рассмотрим сначала случай, когда строки матрицы A линейно независимые. Пусть $\mathscr{B}$ — некоторая база матрицы A, а B — соответствующая

базисная подматрица и пусть[9]

$$A = (B, N), \quad x = \begin{pmatrix} x_{\mathscr{B}} \\ x_{\mathscr{N}} \end{pmatrix}, \quad c = (c_{\mathscr{B}}, c_{\mathscr{N}}),$$

где через $x_{\mathscr{B}}$, $c_{\mathscr{B}}$ обозначены векторы, составленные из базисных компонент векторов x и c соответственно, а через $x_{\mathscr{N}}$, $c_{\mathscr{N}}$ — векторы, составленные из небазисных компонент векторов x и c соответственно. Тогда ЗЛП (34) примет вид:

$$\begin{gathered} \max(c_{\mathscr{B}} x_{\mathscr{B}} + c_{\mathscr{N}} x_{\mathscr{N}}) \\ \begin{cases} B x_{\mathscr{B}} + N x_{\mathscr{N}} = b, \\ x_{\mathscr{B}} \geq 0, \quad x_{\mathscr{N}} \geq 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{35}$$

Шаг исключения Гаусса на каждой итерации симплекс-метода заключается в умножении слева текущей симплекс-таблицы на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & & & -q_{0s}/q_{rs} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -q_{r-1,s}/q_{rs} & & & \\ & & & 1/q_{rs} & & & \\ & & & -q_{r+1,s}/q_{rs} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -q_{m,s}/q_{rs} & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где $r \neq 0$, $s \neq 0$. Следовательно, серия шагов исключения Гаусса эквивалентна домножению симплекс-таблицы на произведение

$$M = E_t \cdot E_{t-1} \cdot \ldots \cdot E_1 \tag{37}$$

матриц вида (36). Нетрудно видеть, что M имеет следующее блочное строение:

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & F \end{pmatrix},$$

[9] Для простоты обозначений мы считаем, что B составлена из первых m столбцов матрицы A.

где F — квадратная матрица порядка m. Пусть на некоторой итерации симплекс-метода получена симплекс-таблица

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c_{\mathscr{B}} & -c_{\mathscr{N}} \\ b & B & N \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} ub & -c_{\mathscr{B}} + uB & -c_{\mathscr{N}} + uN \\ Fb & FB & FN \end{pmatrix}, \tag{38}$$

соответствующая базе $\mathscr{B}$. Тогда $uB - c_{\mathscr{B}} = 0$ и $FB = E$, где E — единичная матрица, откуда $u = c_{\mathscr{B}}B^{-1}$, $F = B^{-1}$. Итак, симплекс-таблица, соответствующая базе $\mathscr{B}$, имеет вид

$$Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{\mathscr{B}}B^{-1}b & 0 & -c_{\mathscr{N}} + c_{\mathscr{B}}B^{-1}N \\ B^{-1}b & E & B^{-1}N \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c_{\mathscr{B}}B^{-1}b & -c + c_{\mathscr{B}}B^{-1}A \\ B^{-1}b & B^{-1}A \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Определение 2.30. Строка $u = c_{\mathscr{B}}B^{-1}$ называется *вектором цен*, соответствующим базе $\mathscr{B}$. Компоненты вектора u называются *ценами*, или *симплекс-множителями*.

Обозначим

$$a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^\top, \quad \widehat{a}_j = (q_{1j}, \ldots, q_{mj})^\top \quad (j = 0, 1, \ldots, n),$$
$$\widehat{b} = \widehat{a}_0, \quad \widehat{a} = \widehat{a}_s, \quad \widehat{c} = -(q_{01}, q_{02}, \ldots, q_{0m}).$$

Пусть $\widehat{c}_{\mathscr{N}} = -(q_{0,k_1}, \ldots, q_{0,k_{n-m}})$, где $\mathscr{N} = \langle k_1, k_2, \ldots, k_{n-m} \rangle$ — номера небазисных переменных. Из (38) и (39), в частности, получаются следующие формулы для вычисления элементов симплекс-таблицы, соответствующей базе $\mathscr{B}$.

Утверждение 2.31. *Справедливы следующие равенства, выражающие элементы симплекс-таблицы через коэффициенты ограничений и вектор цен:*

$$q_{00} = cx = ub, \quad \widehat{a} = B^{-1}a_s, \quad \widehat{b} = B^{-1}b, \\ \widehat{c} = c - uA, \quad \widehat{c}_{\mathscr{N}} = c_{\mathscr{N}} - uN. \tag{40}$$

Замечание 2.32. Интерпретируя коэффициенты симплекс-таблицы (39), получим следующую эквивалентную формулировку задачи (34):

$$\max(c_{\mathscr{B}}B^{-1}b + (c_{\mathscr{N}} - c_{\mathscr{B}}B^{-1}N)x_{\mathscr{N}})$$
$$\begin{cases} x_{\mathscr{B}} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_{\mathscr{N}}, \\ x_{\mathscr{B}} \geq 0, \quad x_{\mathscr{N}} \geq 0. \end{cases} \tag{41}$$

Заметим, что те же условия можно получить другим способом, выражая в (35) базисные переменные $x_{\mathscr{B}}$ через небазисные:

$$x_{\mathscr{B}} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_{\mathscr{N}}$$

и подставляя их в выражение целевой функции.

Замечание 2.33. Формула $\widehat{c} = c - uA$ из (40) показывает, что для того, чтобы вычислить текущие относительные оценки $\widehat{c}$ необходимо из c вычесть строки матрицы A, домноженные на соответствующие цены u.

Замечание 2.34. Решение $\widetilde{x}$ системы $Ax = b$ является опорным вектором, если $\widetilde{x}_{\mathscr{N}} = 0$ и, следовательно, $\widetilde{x}_{\mathscr{B}} = B^{-1}b$. Опорный вектор $\widetilde{x}$ допустим, если $\widetilde{x} \geq 0$ и, так как $\widetilde{x}_{\mathscr{N}} = 0$, то достаточно потребовать $\widetilde{x}_{\mathscr{B}} \geq 0$. Значение целевой функции cx на опорном векторе $\widetilde{x}$ есть $c\widetilde{x} = ub$. Если $\widehat{c} = c - uA \leq 0$, или, что эквивалентно, $\widehat{c}_{\mathscr{N}} = c_{\mathscr{N}} - uN \leq 0$, то опорный вектор оптимален.

Замечание 2.35. Предположим, что ограничения ЗЛП (34) совместны, но ранг матрицы A меньше числа m ее строк. В этом случае, удалив из системы ограничений избыточные уравнения (например, воспользовавшись методом искусственного базиса), приходим к эквивалентной ЗЛП с матрицей ограничений полного ранга. Для этой ЗЛП, в частности, справедливо утверждение 2.31. Покажем, как нулевую строку $(-\widehat{c})$ симплекс-таблицы, составленной для этой ЗЛП по базе $\mathscr{B}$, выразить через элементы матрицы ограничений исходной ЗЛП. Пусть $A = (\widetilde{B}, \widetilde{N})$ — матрица ограничений исходной задачи, где $\widetilde{B}$ — подматрица, составленная из столбцов с номерами из $\mathscr{B}$, а $\widetilde{N}$ — подматрица, составленная из столбцов с номерами из $\mathscr{N}$. В качестве вектора цен u возьмем произвольное решение системы $u\widetilde{B} = c_{\mathscr{B}}$. Очевидно, формула $\widehat{c} = c - uA$ останется справедливой.

2.6. Модифицированный симплекс-метод

Сделаем два замечания, касающиеся алгоритма 1:

1) Для выбора номера s направляющего столбца достаточно знать только нулевую строку.

2) Если s найдено, то для выбора номера r направляющей строки достаточно знать только нулевой и s-й столбцы.

Если m много меньше n, то вместо того, чтобы на каждой итерации пересчитывать всю симплекс-таблицу Q, выгоднее использовать следующую процедуру.

1) Вычислить вектор цен $u = c_{\mathscr{B}} B^{-1}$.

2) Вычислить нулевой столбец $\widehat{b} = B^{-1}b$ и элементы $\widehat{c}_{\mathscr{N}} = c_{\mathscr{N}} - uN$ нулевой строки, соответствующие небазисным переменным.

3) Выбрать номер s направляющего столбца.

4) Вычислить направляющий столбец $\widehat{a} = B^{-1}a_s$.

5) Выбрать номер r направляющей строки.

6) В $\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$ в качестве j_r взять s и перейти к следующей итерации.

Определение 2.36. Приведенная схема вычислений называется *модифицированным симплекс-методом*, или *симплекс-методом со множителями*.

Для предотвращения зацикливания в модифицированном симплекс-методе удобно применять правило Бленда.

Пример 2.37. Решим ЗЛП

$$\max(-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

модифицированным симплекс-методом.

Для нахождения начальной допустимой базы воспользуемся методом искусственного базиса. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = (0, 0, 0, 0, -1, -1).$$

На *первой итерации* вычисляем:

$$\mathscr{B} = \langle 5, 6 \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{\mathscr{B}} = (-1, -1), \quad c_{\mathscr{N}} = (0, 0, 0, 0),$$

$$u = c_{\mathscr{B}} B^{-1} = (-1, -1), \quad \widehat{b} = B^{-1} b = (0, 2)^{\top},$$

$$-\widehat{c}_{\mathscr{N}} = -(c_{\mathscr{N}} - uN) = (-4, 2, -5, -5), \quad \text{откуда} \quad s = 1,$$

$$\widehat{a} = B^{-1} a_s = (\boxed{3}, 1)^{\top}, \quad \text{откуда} \quad r = 1.$$

На *второй итерации*:

$$\mathscr{B} = \langle 1, 6 \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = (1/3, -1),$$

$$\widehat{b} = (0, 2)^{\top}, \quad -\widehat{c}_{\mathscr{N}} = (-2, 1/3, -7/3, 4/3), \quad \text{откуда} \quad s = 1,$$

$$\widehat{a} = (-1, \boxed{2})^{\top}, \quad \text{откуда} \quad r = 2.$$

На *третьей итерации*:

$$\mathscr{B} = \langle 1, 2 \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = (0, 0), \quad -\widehat{c}_{\mathscr{N}} = (0, 0, 0, 0, 1, 1).$$

Нулевая строка симплекс-таблицы неотрицательна. Первый этап симплекс-метода завершен. Найдена допустимая база $\mathscr{B} = \langle 1, 2 \rangle$.

На втором этапе имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = (1, -2, -1, -1).$$

На *первой итерации* второго этапа:

$$\mathscr{B} = \langle 1, 2 \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = (-1/2, 1/2),$$

$$\widehat{b} = (1, 1)^\top, \quad -\widehat{c}_{\mathscr{N}} = (0, 0, {}^{-5}\!/_{2}, {}^{-1}\!/_{2}), \quad \text{откуда} \quad s = 3,$$

$$\widehat{a} = (\boxed{{}^{7}\!/_{6}}, {}^{-1}\!/_{6})^\top, \quad \text{откуда} \quad r = 1.$$

На *второй итерации*:

$$\mathscr{B} = \langle 3, 2\rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = ({}^{-1}\!/_{7}, {}^{11}\!/_{7}),$$

$$\widehat{b} = ({}^{6}\!/_{7}, {}^{8}\!/_{7})^\top, \quad -\widehat{c}_{\mathscr{N}} = ({}^{15}\!/_{7}, 0, 0, {}^{24}\!/_{7}).$$

Нулевая строка симплекс-таблицы неотрицательна. Найден оптимальный вектор $\widehat{x} = (0, {}^{8}\!/_{7}, {}^{6}\!/_{7}, 0)^\top$. Значение целевой функции $\widehat{x}_0 = ub = {}^{22}\!/_{7}$.

В разобранном примере мы явно вычисляли все элементы матрицы B^{-1}. Заметим, однако, что этого можно было избежать. Действительно, из утверждения 2.31 следует, что вектор цен, нулевой и s-й столбцы можно находить, решая следующие системы линейных уравнений:

$$uB = c_{\mathscr{B}}, \quad B\widehat{b} = b, \quad B\widehat{a} = a_s.$$

Опишем другой способ избежать явного вычисления матрицы B^{-1}. Пусть F_i — матрица, полученная из матрицы E_i в произведении (37) вычеркиванием нулевой строки и нулевого столбца (строки и столбцы в E_i нумеруются с нуля). Тогда $B^{-1} = F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1$ и поэтому

$$u = c_{\mathscr{B}} \cdot F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1, \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \widehat{b} &= F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1 \cdot b, \\ \widehat{a} &= F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1 \cdot a_s. \end{aligned} \tag{43}$$

Умножение в (42) следует выполнять слева направо, а в (43) — справа налево. Матрицы F_i вычисляются на каждой итерации. Так как они имеют специальный вид, то для их представления используют специальную форму хранения.

Такой способ весьма удобен, особенно когда матрица ограничений A *разрежена*, т. е. содержит много нулевых элементов. В этом случае используют специальное представление матрицы A, сохраняя в памяти компьютера только ненулевые элементы с указанием их позиции.

На практике используются и другие варианты модифицированного симплекс-метода [5].

Глава 3

Двойственность в линейном программировании

3.1. Двойственная задача

Основная идея двойственности состоит в совместном изучении пары ЗЛП: исходной и так называемой двойственной к ней.

Пусть

$$M_1 = \{1, \ldots, m_1\}, \quad M_2 = \{m_1 + 1, \ldots, m\},$$
$$N_1 = \{1, \ldots, n_1\}, \quad N_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n\}.$$

Рассмотрим две задачи линейного программирования:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i \in M_1) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i & (i \in M_2) \\ x_j \ge 0 & (j \in N_1) \\ x_j \text{ — любые} & (j \in N_2) \end{cases} \tag{47}$$

и

$$\min(u_1b_1 + u_2b_2 + \ldots + u_mb_m)$$

$$\begin{cases} u_i \text{ — любые} & (i \in M_1) \\ u_i \ge 0 & (i \in M_2) \\ u_1a_{1j} + u_2a_{2j} + \ldots + u_ma_{mj} \ge c_j & (j \in N_1) \\ u_1a_{1j} + u_2a_{2j} + \ldots + u_ma_{mj} = c_j & (j \in N_2) \end{cases} \tag{48}$$

Заметим, что каждому $j \in N_1 \cup N_2$ соответствуют переменная x_j в ЗЛП (47) и некоторое ограничение в виде уравнения или неравенства в ЗЛП (48). Будем говорить, что эти переменная и ограничение *соответствуют друг другу*. Аналогично, каждому $i \in M_1 \cup M_2$ соответствуют переменная u_i в ЗЛП (48) и некоторое ограничение в виде уравнения или неравенства в ЗЛП (47). Также будем говорить, что эти переменная и ограничение соответствуют друг другу.

Определение 3.1. Задача (48) называется *двойственной* к задаче (47), при этом задача (47) называется *прямой* задачей. И, наоборот, задача (47) называется *двойственной* к задаче (48), при этом задача (48) называется *прямой* задачей.

Запишем задачи (47), (48) в матричной форме. Для этого введем векторы-столбцы

$$x^{(1)} = (x_1, \ldots, x_{n_1})^\top, \quad x^{(2)} = (x_{n_1+1}, \ldots, x_n)^\top,$$
$$b^{(1)} = (b_1, \ldots, b_{m_1})^\top, \quad b^{(2)} = (b_{m_1+1}, \ldots, b_m)^\top,$$

векторы-строки

$$u^{(1)} = (u_1, \ldots, u_{m_1}), \quad u^{(2)} = (u_{m_1+1}, \ldots, u_m),$$
$$c^{(1)} = (c_1, \ldots, c_{n_1}), \quad c^{(2)} = (c_{n_1+1}, \ldots, c_n)$$

и матрицы $A_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, 2$; $\nu = 1, 2$), составленные из элементов a_{ij}, где $i \in M_\mu$, $j \in N_\nu$. Теперь задачи (47), (48) можно записать в виде:

$$\max(c^{(1)}x^{(1)} + c^{(2)}x^{(2)}) \qquad \min(u^{(1)}b^{(1)} + u^{(2)}b^{(2)})$$

$$\begin{cases} A_{11}x^{(1)} + A_{12}x^{(2)} = b^{(1)}, \\ A_{21}x^{(1)} + A_{22}x^{(2)} \le b^{(2)}, \\ x^{(1)} \ge 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u^{(1)}A_{11} + u^{(2)}A_{21} \ge c^{(1)}, \\ u^{(1)}A_{12} + u^{(2)}A_{22} = c^{(2)}, \\ u^{(2)} \ge 0. \end{cases}$$

В силу приведенного определения, двойственной к канонической ЗЛП

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{49}$$

является ЗЛП

$$\min(u_1b_1 + u_2b_2 + \ldots + u_mb_m)$$

$$\begin{cases} u_1a_{11} + u_2a_{21} + \ldots + u_ma_{m1} \geq c_1, \\ u_1a_{12} + u_2a_{22} + \ldots + u_ma_{m2} \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1a_{1n} + u_2a_{2n} + \ldots + u_ma_{mn} \geq c_n. \end{cases} \tag{50}$$

Обратим внимание на то, что переменная u_i двойственной задачи не ограничена по знаку. В матричной форме записи задачи (49), (50) имеют вид соответственно:

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \min ub, \\ uA \geq c, \end{cases}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^\top$ — столбец переменных прямой задачи, $u = (u_1, u_2, \ldots$ — строка двойственных переменных.

Двойственной к ЗЛП в нормальной форме

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{51}$$

является ЗЛП

$$\min(u_1b_1 + u_2b_2 + \ldots + u_mb_m)$$

$$\begin{cases} u_1a_{11} + u_2a_{21} + \ldots + u_ma_{m1} \geq c_1, \\ u_1a_{12} + u_2a_{22} + \ldots + u_ma_{m2} \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1a_{1n} + u_2a_{2n} + \ldots + u_ma_{mn} \geq c_n, \\ u_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{52}$$

Определение 3.2. Пара задач (51), (52) называется парой двойственных задач *в симметричной форме.*

В матричной форме ЗЛП (51), (52) принимают соответственно вид:

$$\max cx \qquad\qquad \min ub,$$

$$\begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} uA \ge c, \\ u \ge 0. \end{cases}$$

Основные результаты теории двойственности мы докажем для пары двойственных задач (49), (50), хотя из дальнейшего будет ясно, что эти результаты переносятся и на задачи (47), (48).

3.2. Теорема двойственности

Лемма 3.3. *Пусть* $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)^\top$ *— допустимый вектор ЗЛП* (49)*, а* $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_m)$ *— допустимый вектор ЗЛП* (50)*, тогда*

$$c_1\widetilde{x}_1 + c_2\widetilde{x}_2 + \ldots + c_n\widetilde{x}_n \le \widetilde{u}_1 b_1 + \widetilde{u}_2 b_2 + \ldots + \widetilde{u}_m b_m, \quad \textit{или} \quad c\widetilde{x} \le \widetilde{u}b.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{cases} A\widetilde{x} = b, \\ \widetilde{x} \ge 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \widetilde{u}A \ge c. \tag{53}$$

Так как $\widetilde{x} \ge 0$, то из $\widetilde{u}A \ge c$ следует $\widetilde{u}A\widetilde{x} \ge c\widetilde{x}$, откуда, ввиду $A\widetilde{x} = b$, получаем $\widetilde{u}b \ge c\widetilde{x}$. ∎

Следствие 3.4. *Пусть* $\widetilde{x}$*,* $\widetilde{u}$ *— допустимые векторы прямой ЗЛП* (49) *и двойственной ЗЛП* (50) *соответственно, причем значения целевых функций на них совпадают, т. е.* $c\widetilde{u} = \widetilde{u}b$*. Тогда* $\widetilde{x}$*,* $\widetilde{u}$ *— оптимальные векторы задач* (49) *и* (50) *соответственно.*

Следствие 3.5. *Если множество* M *допустимых векторов прямой ЗЛП* (50) *непусто и целевая функция* cx *не ограничена сверху на* M*, то множество* N *допустимых векторов двойственной ЗЛП* (50) *пусто.*

Следствие 3.6. *Если множество* N *допустимых векторов двойственной ЗЛП* (50) *непусто и целевая функция* ub *не ограничена снизу на* N*, то множество* M *допустимых векторов прямой ЗЛП* (49) *пусто.*

Теорема 3.7. *Если прямая ЗЛП* (49) *имеет оптимальный вектор, то двойственная к ней ЗЛП* (50) *также имеет оптимальный вектор и значения целевых функций на них совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не нарушая общности, можно считать, что $\operatorname{rank} A = m$. Применим к ЗЛП (49) какой-либо вариант симплекс-метода, гарантирующий от зацикливания. Через конечное число шагов получаем оптимальную базу $\mathscr{B}$ и оптимальный вектор $\widetilde{x}$. Пусть

$$A = (B, N), \quad c = (c_{\mathscr{B}}, c_{\mathscr{N}}),$$

где B — базисная подматрица матрицы A, соответствующая базе $\mathscr{B}$, и $c_{\mathscr{B}}$, $c_{\mathscr{N}}$ — векторы, составленные из базисных и небазисных компонент вектора c соответственно. Рассмотрим вектор цен $\widetilde{u} = c_{\mathscr{B}} B^{-1}$, соответствующий базе $\mathscr{B}$. Из результатов раздела 2.5 (см. утверждение 2.31) следует, что $c\widetilde{x} = \widetilde{u}b$. Так как $\widetilde{x}$ — оптимальный опорный вектор, то из замечания 2.34 следует, что $c - \widetilde{u}A \leq 0$, откуда $\widetilde{u}A \geq c$.

Итак, вектор цен $\widetilde{u}$, соответствующий оптимальной базе $\mathscr{B}$, удовлетворяет условиям двойственной задачи (50), причем значения целевых функций прямой и двойственной задач на векторах $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$ совпадают. Воспользовавшись следствием 3.4, получаем требуемое. ∎

Замечание 3.8. Предложенное доказательство дает способ построения оптимального вектора $\widetilde{u}$ двойственной ЗЛП по предварительно найденной оптимальной базе $\mathscr{B}$ прямой ЗЛП.

Пример 3.9. Составим и решим задачу, двойственную к ЗЛП из примера 2.14 на с. 37.

По определению двойственная ЗЛП имеет следующий вид:

$$\min(6u_1 + 6u_2)$$

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 \geq 0, \\ u_1 + 2u_2 \geq 2, \\ u_1 \geq -1, \\ u_2 \geq 1. \end{cases} \tag{54}$$

Так как оптимальный вектор $\widetilde{x} = (2, 2, 0, 0)^\top$ прямой ЗЛП соответствует базе $\mathscr{B} = \langle 1, 2 \rangle$, то $\widetilde{u} = c_{\mathscr{B}} B^{-1}$ можно получить, решив систему, полученную обращением в равенства первого и второго неравенств в (54):

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = 1, \\ u_1 + 2u_2 = 1. \end{cases}$$

Получаем $\widetilde{u} = (1/3, 1/3)$. Подставив компоненты решения в целевую функцию, проверим, что оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задачи ($\widetilde{u}_0 = 4$) совпадают.

Упражнение 3.10. Предположим, что целевая функция cx не ограничена на множестве допустимых векторов прямой ЗЛП (49). Тогда по следствию 3.5 условия двойственной ЗЛП несовместны. Покажите, как метод, описанный в доказательстве теоремы 3.7, позволяет найти неравенство двойственной ЗЛП, противоречащее некоторой неотрицательной линейной комбинации остальных неравенств.

Замечание 3.11. Как показывает следующий пример, из несовместности условий прямой ЗЛП не следует неограниченность целевой функции в двойственной ЗЛП, более того, не следует даже совместность условий двойственной ЗЛП.

Пример 3.12. Рассмотрим пару двойственных задач:

$$\begin{array}{ll} \max x_1 & \min(u_1 - u_2) \\ \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1, \\ x_3 = -1, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{r} u_1 \geq 1, \\ -u_1 \geq 0, \\ u_2 \geq 0. \end{array}\right. \end{array}$$

Очевидно, что каждая из задач допустимых векторов не имеет.

Теорема 3.13. *Если ЗЛП* (50) *имеет оптимальный вектор, то ЗЛП* (49) *также имеет оптимальный вектор и значения целевых функций на них совпадают.*

Доказательство. Для доказательства приведем двойственную ЗЛП (50) к каноническому виду. Согласно разделу 1.3 будем иметь:

$$\begin{array}{l} \min ub \\ uA \geq c \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \max u(-b) \\ \left\{\begin{array}{l} uA - y = c, \\ y \geq 0 \end{array}\right. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \max(v - w)(-b) \\ \left\{\begin{array}{l} (v - w)A - y = c, \\ v, w, y \geq 0 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\max\,(v, w, y) \cdot (-b, b, 0)^{\top}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} (v, w, y) \cdot \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -E \end{pmatrix} = c, \\ v, w, y \geq 0, \end{array}\right. \tag{55}$$

где E — единичная матрица. Задача, двойственная к (55), имеет вид:

$$\min ct$$

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -E \end{pmatrix} \cdot t \geq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Обозначая $x = -t$, получаем ЗЛП

$$\max cx$$

$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

которая совпала с (49).

Так как ЗЛП (50) имеет оптимальный вектор $\widetilde{u}$, то ЗЛП (55) также имеет оптимальный вектор, скажем $(\widetilde{v}, \widetilde{w}, \widetilde{y})$. Применим к ЗЛП (55) теорему 3.7. Так как $(\widetilde{v}, \widetilde{w}, \widetilde{y})$ — ее оптимальный вектор, то оптимальный вектор $\widetilde{t}$ двойственной задачи (56) существует, причем

$$\widetilde{u}b = -(\widetilde{v}, \widetilde{w}, \widetilde{y}) \cdot (-b, b, 0)^{\top} = -c\widetilde{t} = c\widetilde{x},$$

где $\widetilde{x} = -\widetilde{t}$. Итак, $\widetilde{x}$ — допустимый вектор ЗЛП (49), причем $\widetilde{u}b = c\widetilde{x}$. По следствию 3.4 получаем, что $\widetilde{x}$ — оптимальный вектор ЗЛП (49). ∎

Пример 3.14. Рассмотрим пару двойственных задач:

$$\max(x_1 + x_2) \qquad \min(u_1 + u_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2u_1 + 3u_2 \geq 1, \\ u_1 + 2u_2 \geq 1. \end{cases}$$

Так как прямая задача не имеет допустимых векторов (единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ее системы уравнений не удовлетворяет условиям неотрицательности), а двойственная имеет (например, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$), то из теоремы 3.13 следует, что значение целевой функции на множестве допустимых векторов двойственной задачи не ограничено снизу (в этом примере оно не ограничено и сверху, в чем можно убедиться как аналогичным образом, так и непосредственно).

Полученные результаты о паре двойственных ЗЛП (49) и (50) можно переформулировать в виде следующей теоремы, принадлежащей фон Нейману, Гейлу[1], Куну[2] и Таккеру[3].

Теорема 3.15 (теорема двойственности). *Пусть дана пара двойственных ЗЛП* (49) *и* (50). *Тогда справедливо одно и только одно из следующих утверждений:*

а) *обе задачи имеют оптимальные векторы с равными значениями целевых функций на них;*

б) *одна из задач имеет допустимые векторы, но не имеет оптимального вектора (целевая функция не ограничена на допустимом множестве), а условия другой задачи несовместны;*

в) *условия обеих задач несовместны.*

Упражнение 3.16. Сформулируйте и докажите теорему двойственности для пары двойственных задач в симметричной форме (51) и (52) и пары двойственных задач в общей форме (47) и (48).

3.3. Лемма Фаркаша и ее варианты

Докажем важный результат теории систем линейных неравенств, принадлежащий Ю. Фаркашу[4].

Теорема 3.17 (лемма Фаркаша). *Для того чтобы неравенство* $ub \geq 0$ *было следствием системы* $uA \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы система* $Ax = b$ *имела решение* $x \geq 0$.

Доказательство.
Достаточность. Пусть x — неотрицательное решение системы $Ax = b$. Домножая систему $uA \geq 0$ справа на x, получим неравенство $ub \geq 0$.

[1] Дэвид Гейл (род. 1922) — американский математик.
[2] Гарольд Вилльям Кун (род. 1925) — американский математик.
[3] Альберт Вилльям Таккер (1905–1995) — американский математик.
[4] Юлиус Фаркаш (1847–1930) — венгерский математик и механик.

Необходимость. Рассмотрим пару двойственных задач

$$\begin{cases} \max 0x \\ Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} \min ub \\ uA \geq 0. \end{array}$$

Пусть первая задача несовместна. Условиям второй задачи удовлетворяет вектор $u = 0$, следовательно, вторая задача совместна. По теореме двойственности получаем, что целевая функция ub второй задачи на множестве допустимых векторов не ограничена снизу. Следовательно, найдется допустимое u, для которого ub принимает отрицательные значения. ∎

Замечание 3.18. Лемма Фаркаша описывает неравенства-следствия системы линейных неравенств $uA \geq 0$, или, что то же, $ua_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Домножив j-е неравенство на неотрицательное число x_j, просуммировав по j и положив $b = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = Ax$, получим неравенство-следствие $ub \geq 0$. Нетривиальная часть леммы состоит в том, что любое неравенство-следствие можно получить таким способом.

Можно дать и неоднородный («аффинный») вариант леммы Фаркаша.

Теорема 3.19 (неоднородный вариант леммы Фаркаша). *Для того чтобы неравенство $ub \geq \delta$ являлось следствием совместной системы $uA \geq c$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор $x \geq 0$, для которого $Ax = b$ и $cx \geq \delta$.*

Доказательство.
Достаточность. Пусть вектор x удовлетворяет условиям $x \geq 0$, $Ax = b$, $cx \geq \delta$. Домножая систему $uA \geq c$ справа на x, получим неравенство $ub \geq cx \geq \delta$.
Необходимость. Рассмотрим пару двойственных задач

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} \min ub \\ uA \geq c. \end{array}$$

Из условий теоремы вторая задача совместна и целевая функция ограничена снизу (величиной δ). По теореме двойственности получаем, что первая задача совместна, причем $\min ub = \max cx \geq \delta$. В качестве x возьмем оптимальный вектор второй задачи. ∎

Упражнение 3.20. Дайте геометрическую интерпретацию теоремы 3.19.

Справедливы следующие варианты леммы Фаркаша.

Утверждение 3.21.

1) *Для того чтобы неравенство* $ub \geq 0$ *было следствием системы* $uA \geq 0$, $u \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы система* $Ax \leq b$ *имела решение* $x \geq 0$.

2) *Для того чтобы неравенство* $ub \geq \delta$ *было следствием совместной системы* $uA \geq c$, $u \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор* $x \geq 0$, *для которого* $Ax \leq b$, $cx \geq \delta$.

Утверждение 3.22.

1) *Для того чтобы неравенство* $ub \geq 0$ *было следствием системы* $uA = 0$, $u \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы система* $Ax \leq b$ *была совместной.*

2) *Для того чтобы неравенство* $ub \geq \delta$ *было следствием совместной системы* $uA = c$, $u \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор* x, *такой, что* $Ax \leq b$, $cx \geq \delta$.

Упражнение 3.23. Докажите утверждения 3.21, 3.22.

Пример 3.24. Рассмотрим прямую задачу из примера (3.14). Условия задачи несовместны. Покажем, как можно найти u_1, u_2, для которых

$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 \geq 0, \\ u_1 + 2u_2 \geq 0, \\ u_1 + u_2 < 0. \end{cases}$$

Решим ЗЛП

$$\max(-x_3 - x_4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

$$Q^{(0)} = \left(\begin{array}{c|cccc} -2 & -5 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right),\quad Q^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cccc} -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 5/3 \\ \hline 1/3 & 0 & -1/3 & 1 & -2/3 \\ 1/3 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right).$$

Получаем оптимальное решение $\widetilde{x} = (1/3, 0, 1/3, 0)$ и оптимальную базу $\mathscr{B} = \langle 1, 3\rangle$. Двойственная задача имеет вид

$$\min(u_1 + u_2)$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 \geq 0, \\ u_1 + 2u_2 \geq 0, \\ u_1 \geq -1, \\ u_2 \geq -1. \end{cases}$$

Ее оптимальный вектор есть решение системы

$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 = 0, \\ u_1 = -1. \end{cases}$$

Получаем искомые значения $u_1 = -1$, $u_2 = 2/3$.

3.4. Дополняющая нежесткость в линейном программировании

3.4.1. Слабая форма свойства дополняющей нежесткости

Докажем важное свойство оптимальных векторов пары двойственных задач, для которых реализуется случай а) теоремы двойственности.

Теорема 3.25 (дополняющая нежесткость в слабой форме). *Пусть $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$ — допустимые векторы ЗЛП* (49) *и* (50) *соответственно. Тогда условие*

$$(\widetilde{u}A - c)\widetilde{x} = 0 \tag{57}$$

является необходимым и достаточным для оптимальности каждого из векторов $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$.

Доказательство. Для допустимых векторов $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$ выполняются соотношения $A\widetilde{x} = b$, $\widetilde{x} \geq 0$, $\widetilde{u}A \geq c$, поэтому (ср. (53))

$$(\widetilde{u}A - c)\widetilde{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{u}A\widetilde{x} = c\widetilde{x} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{u}b = c\widetilde{x}.$$

В силу теоремы 3.7 последнее равенство является необходимым и достаточным для оптимальности $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$. ∎

Следствие 3.26. *Для оптимальности допустимых векторов $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ по крайней мере одно из неравенств*

$$\widetilde{x}_j \geq 0 \quad \textit{и} \quad \widetilde{u}_1 a_{1j} + \widetilde{u}_2 a_{2j} + \ldots + \widetilde{u}_m a_{mj} \geq c_j$$

выполнялось как равенство.

Замечание 3.27. Условие (57) может быть использовано для доказательства оптимальности векторов и для построения оптимального вектора двойственной ЗЛП по оптимальному вектору прямой ЗЛП. Например, если оптимальный опорный вектор прямой задачи $\widetilde{x}$ невырожден, т. е. $\widetilde{x}_j > 0$ при $j \in \mathscr{B}$, то из (57) следует, что для оптимального вектора $\widetilde{u}$ двойственной задачи должно выполняться равенство $\widetilde{u}B = c_{\mathscr{B}}$, откуда $\widetilde{u} = c_{\mathscr{B}} B^{-1}$. Заметим, что полученное равенство совпадает с формулой для оптимального вектора двойственной ЗЛП из доказательства теоремы 3.7. Более того, существование оптимальных векторов $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$, для которых $(\widetilde{u}A - c)\widetilde{x} = 0$, также следует из теоремы 3.7.

Пример 3.28. Докажем, что вектор $\widetilde{u} = (7, 0, 1)^\top$ является оптимальным для задачи

$$\min(-3u_1 - 5u_2 + 11u_3)$$

$$\begin{cases} -3u_1 - 6u_2 + 11u_3 \geq -10, \\ -u_1 - 2u_2 + 4u_3 \geq -3, \\ -u_2 + 2u_3 \geq -1. \\ u_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Эту задачу можно рассматривать как двойственную к задаче

$$\max(-10x_1 - 3x_2 - x_3)$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_4 = -3, \\ -6x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -5, \\ 11x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 11, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

Подставим $\widetilde{u}$ в ограничения первой задачи. Неравенства

$$\begin{aligned} -\widetilde{u}_2 + 2\widetilde{u}_3 &\geq -1, \\ \widetilde{u}_1 &\geq 0, \\ \widetilde{u}_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

выполнятся как строгие. Следовательно, компоненты $\widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_4$, $\widetilde{x}_6$ оптимального вектора $\widetilde{x}$ второй задачи должны быть нулевыми. Остальные компоненты найдем, подставив $\widetilde{x}$ в ограничения-равенства второй задачи:

$$\begin{cases} -3\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 = -3, \\ -6\widetilde{x}_1 - 2\widetilde{x}_2 + \widetilde{x}_5 = -5, \\ 11\widetilde{x}_1 + 4\widetilde{x}_2 = 11, \end{cases}$$

откуда $\widetilde{x} = (1, 0, 0, 0, 1, 0)^\top$. По теореме 3.25 векторы $\widetilde{x}$ и $\widetilde{u}$ — оптимальные.

Упражнение 3.29. Сформулируйте и докажите аналог теоремы 3.25 для пары двойственных задач в симметричной форме (51) и (52) и пары двойственных задач в общей форме (47) и (48).

Пусть $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ — допустимые векторы ЗЛП (49) и (50) соответственно. Из условий $A\widetilde{x} = b$, $\widetilde{x} \geq 0$ следует, что вектор b является неотрицательной линейной комбинацией столбцов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ матрицы A с коэффициентами $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n$. Из следствия 3.26 получаем, что $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ оптимальны тогда и только тогда, когда для тех j, для которых j-е ограничение ЗЛП (50) выполняется строго (т. е. $\widetilde{u}_j a_j > c_j$), коэффициент $\widetilde{x}_j$ этой линейной комбинации равен нулю. Отсюда получаем

Следствие 3.30. *Допустимый вектор $\widetilde{u}$ является оптимальным вектором ЗЛП* (50) *тогда и только тогда, когда вектор b раскладывается в неотрицательную линейную комбинацию тех столбцов матрицы A, для которых соответствующее ограничение выполняется как равенство.*

Дадим геометрическую интерпретацию этому результату. На рисунке 3.1 изображена часть границы области допустимых значений $uA \geq c$, линия уровня $ub = u_0$ целевой функции ub и векторы $-a_1$, $-a_2$, $-b$. Точка $\widetilde{u}$ соответствует оптимальному вектору, причем $\widetilde{u}$ удовлетворяет как равенствам только первому и второму ограничениям. Мы видим, что b раскладывается в неотрицательную линейную комбинацию векторов a_1 и a_2.

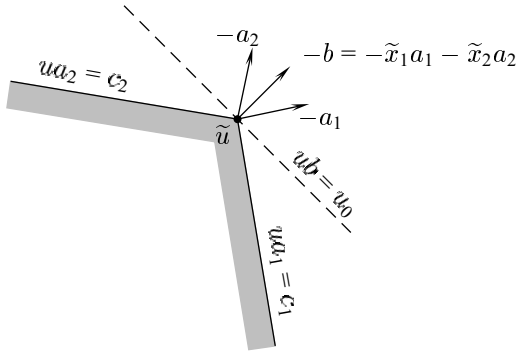


Рис. 3.1

3.4.2. Сильная форма свойства дополняющей нежесткости

Из свойства дополняющей нежесткости в слабой форме следует, что для любых двух оптимальных векторов $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ задач (49), (50) соответственно для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ по крайней мере одно из неравенств

$$\widetilde{x}_j \geq 0 \quad \text{и} \quad \widetilde{u}a_j \geq c_j$$

выполняется как равенство. Свойство дополняющей нежесткости в сильной форме заключается в том, что всегда найдется такая пара оптимальных векторов $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$, что для любого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в равенство обращается ровно одно из указанных неравенств. Вначале докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 3.31. *Пусть условия каждой из задач* (49) *и* (50) *совместны. Тогда для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существуют оптимальные векторы $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^\top$, $\widetilde{u}$ этих задач, такие, что*

$$\widetilde{x}_j > 0 \qquad \textit{или} \qquad \widetilde{u}a_j > c_j.$$

Доказательство. Пусть $x_0 = u_0$ — значения оптимумов в ЗЛП (49), (50).

Рассмотрим пару двойственных задач

$$\max x_j \qquad\qquad \min(ub - \lambda x_0)$$
$$\begin{cases} Ax = b, \\ cx \geq x_0, \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} uA - \lambda c \geq e_j, \\ \lambda \geq 0, \end{cases} \tag{58}$$

где x — столбец переменных первой задачи, $(u, \lambda) = (u_1, \ldots, u_n, \lambda)$ — строка переменных второй задачи, а e_j — вектор-строка, у которого все компоненты, кроме j-й, равны 0, а j-я равна 1. Заметим, что допустимое множество первой задачи совпадает с множеством оптимальных векторов ЗЛП (49). По условию леммы это множество непусто. Если оно содержит вектор $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^\top$, для которого $\widetilde{x}_j > 0$, то лемма доказана.

В противном случае для всякого оптимального вектора x задачи (49) выполнено равенство $x_j = 0$. Тогда оптимальное значение целевой функции в обеих ЗЛП (58) равно 0. В частности, для оптимального вектора (u, λ) второй задачи справедливо

$$ub - \lambda x_0 = 0, \quad uA - \lambda c \geq e_j, \quad \lambda \geq 0. \tag{59}$$

Возможны два случая:

- Если $\lambda = 0$, то пусть $\widetilde{u} = u + v$, где v — произвольный оптимальный вектор ЗЛП (50). В силу (59)

$$\widetilde{u}A = uA + vA \geq e_j + c, \qquad \widetilde{u}b = ub + vb = 0 + u_0.$$

- Если $\lambda > 0$, то пусть $\widetilde{u} = \dfrac{1}{\lambda}u$. В силу (59)

$$\widetilde{u}A = \frac{1}{\lambda}uA \geq c + \frac{1}{\lambda}e_j, \qquad \widetilde{u}b = \frac{1}{\lambda}ub = x_0 = u_0.$$

Итак, в обоих случаях $\widetilde{u}$ — оптимальный вектор ЗЛП (50) (так как $\widetilde{u}b = u_0$), причем $\widetilde{u}a_j > c_j$. ∎

Теорема 3.32 (дополняющая нежесткость в сильной форме).

Пусть условия каждой из задач (49) *и* (50) *совместны. Тогда существуют оптимальные векторы $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ этих задач, такие, что для любого*

$j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в равенство обращается ровно одно из пары неравенств:

$$\widetilde{x}_j \geq 0 \quad \textit{и} \quad \widetilde{u}a_j \geq c_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.31 для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существуют оптимальные векторы $\widetilde{x}^{(j)}$, $\widetilde{u}^{(j)}$, такие, что

$$\widetilde{x}_j^{(j)} > 0 \qquad \text{или} \qquad \widetilde{u}^{(j)}a_j > c_j.$$

Положим

$$\widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}^{(j)}, \qquad \widetilde{u} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{u}^{(j)}.$$

Очевидно, $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ удовлетворяют условиям теоремы. ∎

Определение 3.33. Ограничение-неравенство называется *жестким* в ЗЛП, если для всякого оптимального вектора этой ЗЛП оно выполняется как равенство, и *нежестким* в противном случае.

Следствие 3.34. *Пусть условия каждой из задач* (49) *и* (50) *совместны. Тогда в каждой паре ограничений*

$$x_j \geq 0 \quad \textit{и} \quad ua_j \geq c_j$$

одно неравенство жесткое, а одно нежесткое.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий теорему 3.32 и следствие 3.34. На рис. 3.2 изображены часть границы области допустимых значений $uA \geq c$ двойственной задачи и векторы, противоположные к a_1, $a_2 = b$, a_3. Неравенство $ua_2 = c_2$ — жесткое. Оптимальными точками являются, например, $\widetilde{u}$, $\widetilde{u}'$, $\widetilde{u}''$. Пусть все компоненты вектора $\widetilde{x}$ равны нулю, кроме второй, которая равна 1. Так как $b = a_2$, то по теореме о дополняющей нежесткости $\widetilde{x}$ — оптимальный вектор прямой задачи. Заметим, что $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.32, в то время как $\widetilde{u}'$, $\widetilde{u}''$ не удовлетворяют условиям этой теоремы ни при каком $\widetilde{x}$.

3.5. Множители Лагранжа

Напомним, что метод множителей Лагранжа[5] используется в математическом анализе для нахождения экстремума непрерывно-дифференцируемой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ при ограничениях вида $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$

[5] Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) — французский математик и механик.

3.6. Двойственный симплекс-метод

Теорема двойственности и теорема о дополняющей нежесткости подсказывают, что симплекс-метод, примененный к двойственной задаче, может дать и решение прямой задачи (по крайней мере, если обе ЗЛП имеют допустимые векторы). Различные реализации этой идеи приводят к семейству процедур, объединяемых под названием «*двойственный симплекс-метод*». В отличие от них, методы решения ЗЛП, рассмотренные в главе 2, образуют семейство алгоритмов, объединяемых под названием «*прямой симплекс-метод*».

3.6.1. Двойственный симплекс-метод в строчечной форме

Рассмотрим каноническую задачу (49). Пусть $\mathscr{B} = \langle j_1, \ldots, j_m \rangle$ — некоторая база, $Q = (q_{ij})$ — соответствующая симплекс-таблица, $\widetilde{x}$ — соответствующий опорный вектор.

Определение 3.43. Если $q_{0j} \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то база $\mathscr{B}$ называется *двойственно допустимой* базой, или *псевдобазой*, таблица Q — *двойственно допустимой* таблицей, а вектор $\widetilde{x}$ — *двойственно допустимым опорным вектором*, *двойственно допустимым базисным решением*, или *псевдопланом*.

Идея двойственного симплекс-метода состоит в том, чтобы, переходя от одной двойственно допустимой базы к другой, получить такую базу, для которой $q_{i0} \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Алгоритм 3. Двойственный симплекс-метод в строчечной форме

Шаг 0. Начать с двойственно допустимой базы $\mathscr{B}$ и соответствующей ей таблицы Q.

Шаг 1. Если $q_{i0} \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — конец. Опорный вектор, соответствующий базе $\mathscr{B}$, оптимален. Иначе выбрать такое r, что $q_{r0} < 0$.

Шаг 2. Если $q_{rj} \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — конец. Условия задачи несовместны. Иначе выбрать такое s, что

$$\frac{q_{0s}}{|q_{rs}|} = \min \left\{ \frac{q_{0j}}{|q_{rj}|} : \quad q_{rj} < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \right\}. \tag{68}$$

Шаг 3 (шаг гауссова преобразования). Поделить r-ю строку матрицы Q на q_{rs}. Для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, m\} \setminus \{r\}$ из i-й строки вычесть r-ю, умноженную на q_{is}.

Шаг 4. В $\mathscr{B} = \langle j_1, \ldots, j_m \rangle$ в качестве j_r взять s. Вернуться на шаг 1.

Определение 3.44. Как и ранее, переход от текущей базы к соседней в алгоритме 3 называется *итерацией*. Столбец s, строка r и элемент q_{rs} называются *направляющими*.

Нетрудно проверить, что выбор направляющего столбца s по формуле (68) гарантирует сохранение двойственной допустимости и уменьшение значения целевой функции при $q_{0s} > 0$. Также очевидно, что на шаге 2, если $q_{rj} \geq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), то (так как $q_{r0} < 0$, $x_j \geq 0$) задача несовместна.

Пример 3.45. Решим двойственным симплекс-методом ЗЛП

$$\max(-x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_6 = -2, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

Выбрав за базу $\mathscr{B} = \langle 5, 6 \rangle$, получим исходную двойственно допустимую таблицу

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & \boxed{-4} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Выбирая r, соответствующее наименьшему из q_{i0}, получим $r = 2$, и далее по (68) имеем $s = 4$:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} -1/2 & 5/4 & 1/2 & 7/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ \hline -2 & \boxed{-1/2} & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 & -3/4 & 1 & 0 & -1/4 \end{array}\right).$$

Теперь $r = 1$, $s = 1$:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} -11/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 5/2 & 3/2 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 3/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

Последняя таблица соответствует оптимальному вектору $(4, 0, 0, 3/2, 0, 0)^\top$.

Замечание 3.46. Пусть $\widetilde{x}$ — опорный вектор задачи (49), соответствующий базе $\mathscr{B}$, и пусть $A = (B, N)$, $c = (c_{\mathscr{B}}, c_{\mathscr{N}})$, где B — подматрица, образованная базисными столбцами, а $c_{\mathscr{B}}$, $c_{\mathscr{N}}$ — векторы, составленные из базисных и небазисных компонент вектора c соответственно. Рассмотрим вектор цен $\widetilde{u} = c_{\mathscr{B}} B^{-1}$, соответствующий базе $\mathscr{B}$. Если база $\mathscr{B}$ — двойственно допустимая, то вектор относительных оценок неотрицателен и из утверждения 2.31 следует, что $c - \widetilde{u}A \geq 0$. Таким образом, вектор цен $\widetilde{u}$, соответствующий двойственно допустимому опорному вектору $\widetilde{x}$, является допустимым вектором двойственной задачи (50). Можно сделать вывод, что движению по двойственно допустимым опорным векторам прямой задачи в двойственном симплекс-методе соответствует движение по допустимым опорным векторам двойственной задачи.

Замечание 3.47. Двойственный симплекс-метод удобно применять, если решается последовательность задач, отличающихся только вектором b, так как в этом случае оптимальный вектор предыдущей задачи будет двойственно допустимым вектором последующей задачи.

3.6.2. Двойственный симплекс-метод в столбцовой форме

Двойственный симплекс-метод, как и прямой, можно реализовать как в строчечной, так и в столбцовой форме. Приведем пошаговое описание двойственного симплекс-метода в столбцовой форме, который будет интенсивно использоваться в главе 5.

Алгоритм 4. Двойственный симплекс-метод в столбцовой форме

Шаг 0. Начать с двойственно допустимой базы. Пусть

$$\mathscr{N} = \langle k_1, \ldots, k_{n-m} \rangle$$

— некоторый упорядоченный набор номеров небазисных переменных, а T — соответствующая столбцовая симплекс-таблица.

Глава 4

Транспортная задача

4.1. Постановка задачи и основные свойства

В настоящей главе изучается так называемая классическая *транспортная задача*, в англоязычной литературе известная также как задача Хитчкока–Купманса[1].

Пусть на m складах имеются различные количества некоторого товара, который необходимо доставить в n пунктов назначения. Точнее, i-й склад располагает количеством товара, равным a_i, тогда как j-й пункт назначения должен получить b_j единиц товара. Предполагается, что суммарный спрос равен суммарному предложению, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{71}$$

Кроме величин a_i, b_j заданы величины c_{ij}, представляющие собой затраты на перевозку единицы груза от i-го склада до j-го пункта назначения. Требуется определить количества единиц товара x_{ij}, подлежащих транспортировке от i-го склада в j-й пункт назначения ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$), чтобы при этом все запасы были исчерпаны, потребители удовлетворены и был достигнут минимум суммарных затрат.

[1] Франк Л. Хитчкок (1875–1957) — американский физик и математик.

Получаем следующую ЗЛП, называемую *транспортной задачей в закрытой форме* или просто *транспортной задачей*:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = 1,\ldots,m), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1,\ldots,n), \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n). \end{cases} \tag{72}$$

Развернем встречающиеся суммы и обратим внимание на специальный вид матрицы ограничений:

$$\min(c_{11}x_{11} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn})$$
$$\begin{cases} x_{11} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ + x_{21} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + x_{m1} + \ldots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{mn} = b_n, \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n). \end{cases}$$

Используя матричную нотацию, транспортную задачу можно записать в виде

$$\min cx$$
$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

где

$$b = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top,$$
$$c = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn}),$$
$$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})^\top,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & \dots & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & & & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & & & & & & \ddots & & \\ & & & 1 & & & & 1 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A имеет размеры $(m+n) \times (m \cdot n)$. Компоненты вектора x и вектора цен c удобно сообрать соответственно в матрицы $X = (x_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$.

Мы видим, что транспортная задача является частным случаем ЗЛП и может быть решена общими методами, описанными выше, однако специальный вид матрицы ограничений позволяет предложить более удобную для использования модификацию симплекс-метода.

Утверждение 4.1. *Для совместности задачи* (72) *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$a_i \geq 0, \quad b_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n),$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим допустимый вектор x, в котором

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{S} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \ j = 1, 2, \dots, n), \quad \text{где} \quad S = \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

если $S \neq 0$, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. ∎

Утверждение 4.2. *Ранг матрицы A ограничений транспортной задачи* (72) *равен* $m + n - 1$.

Доказательство. Строки матрицы A образуют линейно зависимую систему, так как сумма первых m строк совпадает с суммой последних n строк, поэтому $\operatorname{rank} A \leq m + n - 1$. С другой стороны, минор

$(m+n-1)$-го порядка, составленный из столбцов, соответствующих переменным $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1,n-1}$, и всех строк, за исключением последней, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

поэтому $\operatorname{rank} A \geq m+n-1$. ∎

4.2. Унимодулярные матрицы

Определение 4.3. Квадратная целочисленная матрица называется *унимодулярной*, если ее определитель равен ± 1. Целочисленная (не обязательно квадратная) матрица называется *вполне унимодулярной*, если любой ее минор равен ± 1 или 0.

Утверждение 4.4. *Матрица ограничений A транспортной задачи вполне унимодулярна.*

Доказательство. Отметим следующие свойства матрицы A:

1) Элементы матрицы — нули и единицы.

2) Каждый столбец содержит ровно две единицы.

3) Сумма первых m строк (назовем их строками 1-й группы) совпадает с суммой последних n строк (назовем их строками 2-й группы).

Очевидно, что любой минор 1-го порядка равен 0 или 1. В предположении, что всякий минор k-го порядка равен ± 1 или 0, докажем, что таким же свойством обладает произвольный минор M порядка $(k+1)$. Пусть в этом миноре нашелся столбец, содержащий ровно одну единицу. Раскрывая M по этому столбцу и используя предположение индукции,

получаем, что M равен ± 1 или 0. Теперь предположим, что в M нет ни одного столбца с одной единицей. Тогда из свойств 2) и 3) получаем, что сумма строк минора M, соответствующих строкам матрицы A 1-й группы, равна сумме строк, соответствующих строкам 2-й группы, поэтому $M = 0$. ∎

Упражнение 4.5. Пусть каждый столбец целочисленной матрицы A с элементами $\pm 1, 0$ содержит не более двух ненулевых элементов, причем строки матрицы можно разбить на две группы, такие, что в каждом столбце ненулевые элементы одного знака находятся в строках из разных групп, а ненулевые элементы разных знаков — в одной группе. Доказать, что матрица A вполне унимодулярна.

Следствие 4.6. *Если в условиях транспортной задачи* (72) *коэффициенты a_i и b_j целые ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), то любой опорный вектор этой задачи целочислен.*

Доказательство. Небазисные переменные допустимого опорного вектора равны нулю, а базисные получаются в результате решения системы линейных уравнений $Bx_{\mathscr{B}} = b_{\mathscr{B}}$ с невырожденной матрицей B. По предыдущему утверждению $\det B = \pm 1$, поэтому из формул Крамера следует, что компоненты $x_{\mathscr{B}}$ целочисленны. ∎

Следствие 4.7. *Любой конечный вариант симплекс-метода, примененный к транспортной задаче* (72)*, в которой $a_i \in \mathbf{Z}$ и $b_j \in \mathbf{Z}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), либо устанавливает несовместность ее условий, либо находит целочисленный оптимальный вектор.*

4.2.1. Задача о назначениях

Следствие 4.6 имеет большое значение, так как известно много задач, сводящихся к транспортной задаче с дополнительным условием целочисленности решения. В качестве примера рассмотрим так называемую *задачу о назначениях*.

Пусть имеется n работ и n механизмов и задана производительность c_{ij} i-го механизма на j-й работе ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Требуется установить взаимно однозначное соответствие между механизмами и работами так, чтобы общая производительность была максимальной.

Для построения математической модели введем переменные x_{ij}, принимающие значение 0 или 1 в зависимости от того, назначен или нет i-й механизм на j-ю работу. Получаем следующую задачу:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{73}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{74}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{75}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}. \tag{76}$$

Ввиду (74) условие (76) можно заменить условиями

$$x_{ij} \geq 0 \tag{77}$$

$$x_{ij} \in \mathbf{Z} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n). \tag{78}$$

По следствию 4.6 ограничения (78) можно опустить. Итак, для решения задачи о назначениях (73)–(76) достаточно решить транспортную задачу (73)–(75), (77).

4.3. Графовая характеристика допустимых векторов

Обозначим через p_{ij} столбец матрицы A, соответствующий переменной x_{ij}. Заметим, что

$$p_{ij} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^{\top},$$

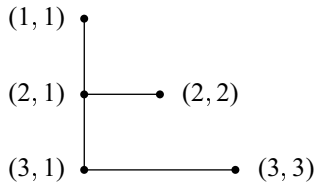
где единицы стоят на i-м и $(m + j)$-м местах, а на остальных местах — нули. Пусть

$$p_{i_1 j_1},\ p_{i_2 j_2},\ \ldots,\ p_{i_t j_t} \tag{79}$$

— некоторая система столбцов матрицы A. Построим по этой системе граф следующим образом. Вершинами графа будут точки (i, j) декартовой плоскости, для которых соответствующий им столбец p_{ij} входит в данный набор. Две вершины соединим ребром, если они лежат на одной

горизонтали или вертикали и между ними нет других вершин графа. Рассматриваемый граф удобно изображать поверх таблиц X и C: вершина графа, соответствующая столбцу p_{ij}, помещена в центр клетки (i, j).

Например, системе $p_{11}, p_{21}, p_{22}, p_{31}, p_{33}$ соответствует граф:

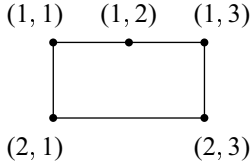


Утверждение 4.8. *Для того чтобы система* (79) *была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий этой системе граф не содержал циклов.*

Доказательство.
Необходимость. Предположим, что в графе есть цикл, образованный вершинами

$$(i_0, j_0),\ (i_1, j_1),\ \ldots,\ (i_t, j_t), \tag{80}$$

перечисленными в порядке обхода ($i_0 = i_t$, $j_0 = j_t$). В цикле (80) могут быть вершины двух типов. Вершину (i_k, j_k) назовем *угловой*, если соседние с ней вершины (i_{k-1}, j_{k-1}) и (i_{k+1}, j_{k+1}) не лежат на одной горизонтали или вертикали. В противном случае вершина *неугловая*. (Например, в цикле



вершины $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 1)$ — угловые, а вершина $(1, 2)$ — неугловая.) Если в (80) нет неугловых вершин, то, очевидно, что t четно и справедливо равенство

$$p_{i_1 j_1} - p_{i_2 j_2} + \ldots - p_{i_t j_t} = 0.$$

Если же (80) содержит неугловые вершины, то, предварительно исключив их, можно записать аналогичное равенство. В обоих случаях система (79) линейно зависима.

Достаточность. Пусть система (79) линейно зависима. Тогда найдется нетривиальный набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, такой, что

$$\alpha_1 p_{i_1 j_1} + \ldots + \alpha_t p_{i_t j_t} = 0. \tag{81}$$

Пусть $\alpha_k \neq 0$ для некоторого $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Так как i_k-я и $(m + j_k)$-я компоненты столбца $p_{i_k j_k}$ равны 1, то для того, чтобы векторное равенство (81) выполнялось, необходимо, чтобы в системе (80) нашлись столбец, у которого i_k-я компонента равна 1, и столбец, у которого $(m + j_k)$-я компонента равна 1. Таким образом, всякая вершина (i_k, j_k) с $\alpha_k \neq 0$ смежна двум другим вершинам. Ввиду конечности числа вершин в графе он содержит цикл. ∎

Следствие 4.9. *Пусть $t = m + n - 1$. Для того чтобы система* (79) *образовывала столбцовую базу матрицы A ограничений транспортной задачи, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий этой системе граф не содержал циклов.*

Замечание 4.10. Распознать, образует ли система (79) столбцовую базу матрицы A, можно с помощью еще одного графа, который построим следующим образом. Возьмем m вершин $U_1, U_2, \ldots, U_m$, соответствующих складам, и n вершин $V_1, V_2, \ldots, V_n$, соответствующих пунктам назначения. Вершину U_i соединим ребром с вершиной V_j в том и только в том случае, если соответствующий этим вершинам столбец p_{ij} входит в набор (79) (кроме этих ребер других ребер в графе нет). Аналогично утверждению 4.8 можно показать, что система (79) линейно независима тогда и только тогда, когда построенный граф не содержит циклов.

4.4. Получение начального допустимого опорного вектора

С каждой столбцовой базой транспортной задачи свяжем упорядоченный набор $\mathscr{B}$, состоящий из пар вида (i, j), где p_{ij} — столбец матрицы A, входящий в базу. Так, например, если система (79) образует базу, то

$$\mathscr{B} = \langle (i_0, j_0),\ (i_1, j_1),\ \ldots,\ (i_t, j_t) \rangle .$$

Как и ранее, для краткости $\mathscr{B}$ тоже будем называть *базой*.

Рассмотрим два способа построения начального допустимого опорного вектора.

4.4.1. Метод северо-западного угла

Метод заключается в заполнении матрицы X, начиная с клетки, расположенной в левом верхнем углу, по следующим правилам.

Алгоритм 5. Метод северо-западного угла

Шаг 0. Положить $x_{ij} = 0$, $\widetilde{a}_i = a_i$, $\widetilde{b}_j = b_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, $\mathscr{B} = \emptyset$. Установить $i = 1$, $j = 1$.

Шаг 1. В $\mathscr{B}$ добавить (i, j).

Шаг 2. Если $\widetilde{a}_i < \widetilde{b}_j$ или $\widetilde{a}_i = \widetilde{b}_j$, $i < n$, то положить $x_{ij} = \widetilde{a}_i$, $\widetilde{b}_j = \widetilde{b}_j - \widetilde{a}_i$, увеличить i на 1. Иначе положить $x_{ij} = \widetilde{b}_j$, $\widetilde{a}_i = \widetilde{a}_i - \widetilde{b}_j$ и увеличить j на 1.

Шаг 3. Если $i \le m$ и $j \le n$, то перейти на шаг 1. Иначе — конец. База $\mathscr{B}$ и начальный допустимый опорный вектор $X = (x_{ij})$ построены.

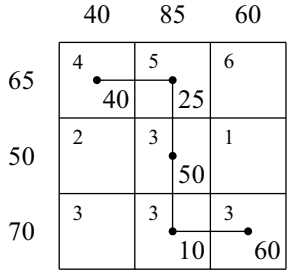
Заметим, что в результате работы описанной процедуры может быть построен X, такой, что $x_{ij} = 0$ для некоторых пар $(i, j) \in \mathscr{B}$, т. е. $\mathscr{B}$ вырождена (это случится при $\widetilde{a}_i = 0$ или $\widetilde{b}_j = 0$).

Очевидно, что шаг 1 алгоритма 5 будет выполняться $m + n - 1$ раз. При заполнении очередной клетки мы переходим либо к соседней справа, либо к соседней снизу, откуда следует, что граф, соответствующий построенному множеству $\mathscr{B}$, не содержит циклов. Поскольку ясно, что ограничения транспортной задачи выполнены, то $\mathscr{B}$ является допустимой базой.

Пример 4.11. Рассмотрим транспортную задачу, в которой

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = 65, & a_2 = 50, & a_3 = 70, \\
b_1 = 40, & b_2 = 85, & b_3 = 60, \\
c_{11} = 4, & c_{12} = 5, & c_{13} = 6, \\
c_{21} = 2, & c_{22} = 3, & c_{23} = 1, \\
c_{31} = 3, & c_{32} = 3, & c_{33} = 3.
\end{array}
$$

Компактно исходные данные и компоненты найденного по методу северо-западного угла начального допустимого вектора запишем в виде следующей таблицы.



Слева от таблицы указаны величины a_i, сверху записаны b_j. В левом верхнем углу каждой клетки (i, j) стоит c_{ij}. Если $(i, j) \in \mathscr{B}$, то в правом нижнем углу соответствующей клетки записана величина x_{ij}. Построена база

$$\mathscr{B} = \langle (1,1),\ (1,2),\ (2,2),\ (3,2),\ (3,3) \rangle .$$

4.4.2. Метод минимального элемента

В методе минимального элемента используется эвристическое соображение, по которому сначала заполняются клетки x_{ij} с меньшим значением c_{ij}.

Алгоритм 6. Метод минимального элемента

Шаг 0. Присвоить всем x_{ij} значение 0. Положить $\widetilde{a}_i = a_i$, $\widetilde{b}_j = b_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, $\mathscr{B} = \emptyset$, $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Шаг 1. Выбрать r, s, такие, что[2]

$$c_{rs} = \min \{ c_{ij} : i \in I, j \in J \} . \tag{82}$$

Добавить (r, s) в $\mathscr{B}$.

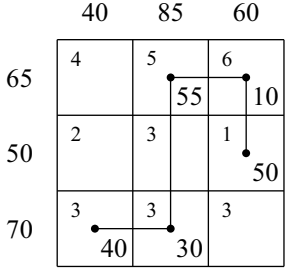
[2] В случае неоднозначности среди всех r и s, удовлетворяющих (82), можно выбрать любые.

Шаг 2. Если $\widetilde{a}_r < \widetilde{b}_s$ или $\widetilde{a}_r = \widetilde{b}_s$, $|I| > 1$, то исключить r из I и положить $x_{rs} = \widetilde{a}_r$, $\widetilde{a}_r = 0$, $\widetilde{b}_s = \widetilde{b}_s - x_{rs}$. Иначе исключить s из J и положить $x_{rs} = \widetilde{b}_s$, $\widetilde{a}_r = \widetilde{a}_r - x_{rs}$, $\widetilde{b}_s = 0$.

Шаг 3. Если $I \neq \emptyset$ и $J \neq \emptyset$, то перейти на шаг 1, иначе — стоп: база $\mathscr{B}$ и начальный допустимый опорный вектор $X = (x_{ij})$ построены.

Пример 4.12. Рассмотрим задачу из примера 4.11. Метод минимального элемента приводит к следующей базе и следующей таблице:

$$\mathscr{B} = \langle (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (1,2),\ (1,3) \rangle$$



Очевидно, что метод минимального элемента сводится к методу северо-западного угла, если перенумеровать склады и пункты назначения в соответствии с порядком удаления элементов из множеств I, J соответственно. Отсюда следует, что алгоритм 6 приводит к начальной допустимой базе $\mathscr{B}$.

4.5. Пересчет опорного вектора при изменении базы

Пусть X — опорный вектор, соответствующий базе

$$\mathscr{B} = \langle (i_1, j_1),\ (i_2, j_2),\ \ldots,\ (i_{m+n-1}, j_{m+n-1}) \rangle .$$

Добавим к базе еще один элемент (i, j), тогда граф, соответствующий полученной системе, по утверждению 4.8 содержит цикл, очевидно, единственный. Для определенности будем считать, что угловыми элементами этого цикла являются

$$(i, j),\ (i_1, j_1),\ (i_2, j_2),\ \ldots,\ (i_{s-1}, j_{s-1}),$$

причем

$$i = i_1,\ j_1 = j_2,\ \ldots,\ i_{s-2} = i_{s-1},\ j_{s-1} = j$$

(см. рис. 4.1). Заметим, что s — четно.

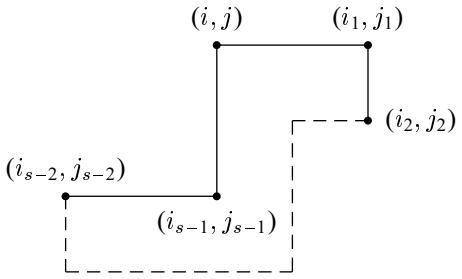


Рис. 4.1

Определим вектор $X' = (x'_{ij})$ следующим образом:

$$x'_{ij} = x_{ij} + \theta,\ x'_{i_1 j_1} = x_{i_1 j_1} - \theta,\ x'_{i_2 j_2} = x_{i_2 j_2} + \theta,\ \ldots,\ x'_{i_{s-1} j_{s-1}} = x_{i_{s-1} j_{s-1}} - \theta,$$

где θ — некоторое положительное число. Остальные компоненты вектора X' будут совпадать с соответствующими компонентами X. Очевидно, X' удовлетворяет всем ограничениям транспортной задачи (72), кроме, быть может, ограничений $x'_{ij} \geq 0$. Для того чтобы эти ограничения были выполнены, необходимо и достаточно, чтобы

$$x_{i_k j_k} - \theta \geq 0 \quad (k = 1, 3, \ldots, s-1). \tag{83}$$

Если положить

$$\theta = \min \left\{ x_{i_k j_k} : k = 1, 3, \ldots, s-1 \right\},$$

то, очевидно, условие (83) будет выполнено и, кроме того, хотя бы одна из компонент, для определенности x'_{i_r, j_r}, обратится в нуль. В базе $\mathscr{B}$ заменим (i_r, j_r) на (i, j). Полученная таким образом база $\mathscr{B}'$ соответствует допустимому опорному вектору X'. Заметим, что база $\mathscr{B}'$ невырождена тогда и только тогда, когда (i_r, j_r) определяется единственным образом.

4.6. Метод потенциалов

В этом разделе мы опишем способ нахождения элемента, вводимого в базу. Этот способ называется *методом потенциалов*. Метод потенциалов разработан в 1940 г. Л.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным[3]. Независимо метод открыли Ф. Хитчкок (1941 г., наброски алгоритма) и Т. Купманс (1949 г.).

Идея метода заключается в следующем. Для текущей базы $\mathscr{B}$ находятся соответствующие ей цены (см. определение на стр. 55), называемые в данном случае *потенциалами*. Затем с помощью этих цен, используя утверждение 2.31, строятся текущие относительные оценки, среди которых выбирается отрицательная.

Прежде чем переходить к более детальному описанию метода, обратим внимание на две важные детали. Во-первых, строки матрицы A линейно зависимы, поэтому для нахождения цен u мы воспользуемся замечанием 2.35. Во-вторых, транспортная задача сформулирована как задача на минимум, поэтому условие оптимума приобретает вид $c - uA \geq 0$.

Перейдем к более детальному описанию метода потенциалов. Обозначим потенциалы, соответствующие верхним m строкам матрицы A, через u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), а потенциалы, соответствующие нижним n строкам матрицы A, через v_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Напомним, что строки матрицы A линейно зависимы. Согласно замечанию 2.35 в качестве цен (потенциалов) можно взять произвольное решение системы $u\widetilde{B} = c_{\mathscr{B}}$, которая в нашем случае имеет вид:

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad (i,\ j) \in \mathscr{B}.$$

Ранг этой системы совпадает с рангом матрицы A и равен $m + n - 1$, следовательно, количество свободных переменных равно 1. Оказывается, в качестве свободной переменной можно выбрать любую, полагая ее равной произвольному значению. Действительно, в силу того, что граф, соответствующий базе $\mathscr{B}$, связен и не содержит циклов, по этому значению однозначно определяются величины остальных потенциалов.

Формула $\widehat{c} = c - uA$ для нахождения относительных оценок $\widehat{c}_{ij}$ в нашем случае приобретает вид: $\widehat{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$. Если $\widehat{c}_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$), т. е.

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n), \tag{84}$$

[3] Марк Константинович Гавурин (1911–1992) — советский математик.

то текущая база $\mathscr{B}$ оптимальна. В противном случае выберем произвольную пару $(i,j) \notin \mathscr{B}$, для которой $\widehat{c}_{ij} < 0$, и по способу, описанному в разделе 4.5, найдем элемент, выводимый из $\mathscr{B}$.

Замечание 4.13. Запишем ЗЛП, двойственную (72). Обозначим переменные двойственной задачи, соответствующие верхним m строкам матрицы A, через u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), а переменные, соответствующие нижним n строкам матрицы A, — через u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Двойственная ЗЛП выглядит следующим образом:

$$\max \left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right)$$
$$u_i + v_j \le c_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Заметим, что условия оптимальности (84) текущей базы совпадают с условиями допустимости вектора $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$.

Для предотвращения зацикливания в методе потенциалов удобно применять правило Бленда.

Пример 4.14. Решим методом потенциалов транспортную задачу из примера 4.11, опираясь на начальную базу

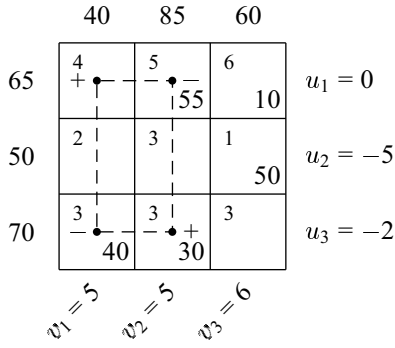
$$\mathscr{B}^{(0)} = \langle (2,3), (3,1), (3,2), (1,2), (1,3) \rangle ,$$

найденную в примере 4.12.

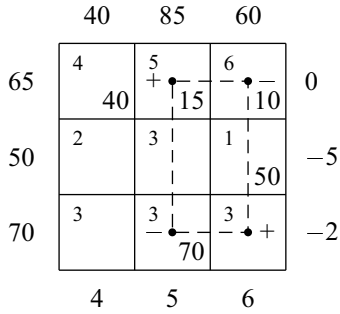
Для потенциалов получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 5, \\ u_1 + v_3 = 6, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_3 + v_1 = 3, \\ u_3 + v_2 = 3, \end{cases}$$

из которой, полагая $u_1 = 0$, последовательно находим $v_2 = 5$, $v_3 = 6$, $u_2 = -5$, $u_3 = -2$, $v_1 = 5$. Ограничение $u_i + v_j \le c_{ij}$ не выполнится, например, при $i = 1$, $j = 1$. Поэтому вводим $(1,1)$ в базу. Чтобы определить, какой элемент будет выведен из базы, найдем возникший цикл:



Минимальным среди элементов x_{ij}, стоящих в клетках, отмеченных символом «$-$», является $x_{31} = 40$, поэтому исключим $(3, 1)$ из базы. Получаем новую базу $\mathscr{B}^{(1)} = \langle (2,3), (1,1), (3,2), (1,2), (1,3) \rangle$ и пересчитываем опорный вектор:



Вычислим текущее значение потенциалов. Как и выше, значения переменных u_i запишем справа от таблицы, а значения переменных v_j — снизу от таблицы. Ограничение $u_i + v_j \le c_{ij}$ не выполняется при $i = j = 3$. Поэтому вводим в базу $(3, 3)$. Чтобы определить, какой элемент будет выведен из базы, в образовавшемся цикле среди x_{ij}, отмеченных знаком «$-$», определим минимальный. Им является $x_{13} = 10$, поэтому исключим $(1, 3)$ из базы. Получаем новую базу $\mathscr{B}^{(2)} = \langle (2,3), (1,1), (3,2), (1,2), (3,3) \rangle$, пересчитываем опорный вектор и текущие значения потенциалов:

	40	85	60	
65	4 40	5 25	6	0
50	2	3	1 50	−4
70	3	3 60	3 10	−2
	4	5	5	

Все неравенства $u_i + v_j \le c_{ij}$ выполнены, следовательно, текущий опорный вектор оптимален. Его компоненты равны $x_{11} = 40$, $x_{12} = 25$, $x_{23} = 50$, $x_{32} = 60$, $x_{33} = 10$, $x_{13} = x_{21} = x_{22} = x_{31} = 0$. Значение целевой функции равно $4 \cdot 40 + 5 \cdot 25 + 1 \cdot 50 + 3 \cdot 60 + 3 \cdot 10 = 545$.

Пример 4.15. Рассмотрим пример решения вырожденной задачи. Приведем соответствующие таблицы. Начальный опорный вектор найдем методом минимального элемента.

	40	85	60
50	2	1 50	5
60	3 40	4	3 20
75	4	6 35	6 40

	40	85	60	
50	2	1 50	5	0
60	3 40	4	3 20	2
75	4	6 35	6 40	5
	1	1	1	

	40	85	60	
50	2	1 50	5	0
60	3 0	4	3 60	4
75	4 40	6 35	6	5
	−1	1	−1	

	40	85	60
50	2	1 50	5
60	3	4 0	3 60
75	4 40	6 35	6

4.7. Задачи

4.1. Рассмотрим вариант транспортной задачи, в которой суммарное количество товара на складах может превышать суммарные потребности потребителей. Требуется так организовать перевозку, чтобы потребители были удовлетворены и был достигнут минимум суммарных затрат. Мы приходим к ЗЛП

$$\min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i & (i=1,\dots,m), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j=1,\dots,n), \\ x_{ij} \ge 0 & (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n), \end{cases} \tag{85}$$

называемой транспортной задачей *в открытой форме*[4]. Докажите, что задача (85) совместна тогда и только тогда, когда

$$a_i \ge 0, \quad b_j \ge 0 \quad (i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n),$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i \ge \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Докажите, что такую задачу можно свести к транспортной задаче в закрытой форме путем введения дополнительных переменных $x_{i,n+1}$ $(i=1,2,\dots,m)$, соответствующих новому (фиктивному) пункту назначения с параметрами

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad c_{i,n+1} = 0 \quad (i=1,2,\dots,m).$$

4.2. Привести задачу (85) к каноническому виду и выписать матрицу ограничений полученной задачи. Доказать целочисленность допустимых опорных векторов этой задачи при условии $a_i \in \mathbf{Z}$ $(i=1,2,\dots,m)$, $b_j \in \mathbf{Z}$ $(j=1,2,\dots,n)$.

[4]Строго говоря, транспортной задачей в открытой форме называют любую задачу, полученную из (72) заменой хотя бы одного равенства на неравенство.

4.3. Доказать, что для того, чтобы транспортная задача в закрытой форме была вырождена, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, что $\sum\limits_{i \in I} a_i = \sum\limits_{j \in J} b_j$.

4.4. Пусть $\widehat{x}$ — допустимый опорный вектор транспортной задачи, найденный методом северо-западного угла, а $\widetilde{x}$ — методом минимального элемента. Найти такую транспортную задачу, чтобы

а) $\widehat{x}$ был оптимальным, а $\widetilde{x}$ — нет,

б) $\widetilde{x}$ был оптимальным, а $\widehat{x}$ — нет.

4.5. Решить транспортную задачу (72) с $n = 4$ складами и $m = 4$ пунктами назначения, если

$$
\begin{array}{llll}
a_1 = 20, & a_2 = 30, & a_3 = 40, & a_4 = 50, \\
b_1 = 35, & b_2 = 35, & b_3 = 35, & b_4 = 35, \\
c_{11} = 3, & c_{12} = 6, & c_{13} = 2, & c_{14} = 3, \\
c_{21} = 7, & c_{22} = 1, & c_{23} = 1, & c_{24} = 3, \\
c_{31} = 3, & c_{32} = 3, & c_{33} = 2, & c_{34} = 6, \\
c_{41} = 5, & c_{42} = 5, & c_{43} = 3, & c_{44} = 2.
\end{array}
$$

4.6. Решить задачу (85), в которой

$$
\begin{array}{ll}
n = 2, & m = 2, \\
a_1 = 10, & a_2 = 20, \\
b_1 = 10, & b_2 = 10, \\
c_{11} = 1, & c_{12} = 1, \\
c_{21} = 2, & c_{22} = 3.
\end{array}
$$

4.7. Решить предыдущую задачу при дополнительном условии, что товар со второго склада должен быть вывезен полностью. Указание: положить $c_{23} = M$, где M — достаточно большое число.

Литература

1. *Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю.* Линейное программирование. — М.: Факториал Пресс, 2003.
2. *Гасс С.* Линейное программирование (методы и приложения). — М.: Физматгиз, 1961.
3. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.
4. *Данциг Дж.* Линейное программирование. Его применения и обобщения — М.: Прогресс, 1966.
5. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. — М.: Мир, 1984.
6. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1991.
7. *Таланов В. А., Шевченко В. Н.* Системы уравнений транспортного типа с приложением к комбинаторике. — Горький: Изд-во Горьков. гос. ун-та, 1978.
8. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. — М.: Мир, 1974.
9. *Шевченко В. Н.* Качественные вопросы целочисленного линейного программирования. — М.: Физматлит, 1995.
10. *Шевченко В. Н.* Линейное и целочисленное линейное программирование. — Горький: Изд-во Горьков. гос. ун-та, 1976.

11. *Шевченко В. Н.* Линейное программирование: история, достижения, проблемы // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 1 (26). — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2003. — С. 216–226.

12. *Шевченко В. Н.* Линейное программирование и теория линейных неравенств. — Горький: Изд-во Горьков. гос. ун-та, 1977.

13. *Шевченко В. Н.* Множества целочисленных решений квадратной системы линейных неравенств. — Горький: Изд-во Горьков. гос. ун-та, 1983.

Предметно-именной указатель

$\mathscr{LD}$-метод, 90
$\mathscr{L}$-метод, 44

Алгоритм
  Гомори
    полностью целочисленный (третий), 135
    циклический (первый), 123, 127, 133
  жадный, 150
  полностью целочисленный
    двойственный, 133
    прямой, 133, 139

База, 32, 104
  вырожденная, 35
  двойственно допустимая, 86
  допустимая, 32
Базы соседние, 34
Бленд Р. Г., 46

Валле Пуссен Ш. Ж., 34
Вальрас Л., 8
Вектор
  допустимый, 9
  опорный, 32
    вырожденный, 35
    двойственно допустимый, 86
    допустимый, 32
  оптимальный, 9
Ветвление, 145
  в глубину, 147
  в ширину, 147

Гаврурин М. К., 108
Гейл Д., 73
Гиперкуб, 91
Гиффен Р., 23
Гловер Ф., 133, 139
Гомори Р., 121–123, 127, 133, 135

Данциг Дж. Б., 9, 22, 34
Двойственная задача, 67
Джонсон С. М., 121
Дизъюнкция элементарная, 117
Динамическое программирование, 141
Дихотомия, 116
Дополняющая нежесткость
  в сильной форме, 79, 80
  в слабой форме, 76

Задача
  NP-полная, 118
  NP-трудная, 115
  булева линейного программирования, 114
  вогнутого программирования, 16
  выпуклого программирования, 15
  коммивояжера, 119
  линейного программирования (ЗЛП), 17
    каноническая, 18
    общая, 18
    стандартная, 18
  максимизации прибыли, 22
  математического программирования, 9, 82
  несовместная, 10
  о выполнимости, 117
  о назначениях, 100, 120

о раскрое, 118
о рюкзаке, 115, 141
$\{0, 1\}$, 115
целочисленном, 115
о «смесях», 23
с неделимостями, 23
с фиксированными доплатами, 116
транспортная, 96, 97
в закрытой форме, 97
целочисленного линейного программирования, 114
Зацикливание, 42
ЗЛП, 17
вырожденная, 35
ЗЦЛП, 114
целочисленная, 114

Итерация, 35, 87

Канторович Л. В., 8, 108
Кенэ Ф., 8
Кли В. Л., 91
Комбинация
аффинная, 25
выпуклая, 10
коническая, 25
Конъюнктивная нормальная форма, 117
Куб n-мерный, 91
Кун Г. В., 73, 82
Купманс Т. Ч., 9, 96

Лагранж Ж. Л., 81
Лексикография, 43
Лемма Фаркаша, 73

Максимум
глобальный, 9
локальный, 15
Маркс К., 8
Матрица
вполне унимодулярная, 99
разреженная, 59
унимодулярная, 99
Метод
ветвей и границ, 144, 146
градиентный, 16
искусственного базиса, 50, 51
минимального элемента, 105
потенциалов, 108
северо-западного угла, 104
эллипсоидов, 92
Минимум
глобальный, 10
локальный, 15
Минти Дж. Дж., 91
Множество
выпуклое, 11
многогранное, 13
Множители Лагранжа, 82, 83
Моцкин Т. С., 22

Невязка, 20
Нейман Дж., фон, 9, 73
Немировский А. С., 92
Неравенство
жесткое, 81
нежесткое, 81
производящее, 123
Неравенство Коши–Буняковского, 12

Оболочка
аффинная, 25
выпуклая, 10
коническая, 26
Отрезок, 10
Отсечение, 121
Гомори, 123
Оценивание, 145
Оценки относительные, 33

Парадокс ирландский, 23
Переменная
базисная, 29
булева, 114
искусственная, 50
небазисная, 29
свободная, 29
связанная, 29
слабая, 20
План, 9
опорный, 32
Подматрица базисная, 32
Полиэдр, 13
Полупространство, 11

Потенциал, 108
Правило Бленда, 46, 57, 63, 109
Преобразование аффинное, 26
Прямая задача, 67
Псевдобаза, 86
Псевдоплан, 86

Рекорд, 146
Решение
  базисное, 32
    двойственно допустимое, 86
    допустимое, 32

Симплекс, 22
Симплекс-метод, 21, 31, 34, 38
  $\mathscr{LD}$-метод, 90
  $\mathscr{L}$-метод, 44
  второй этап, 51
  двойственный, 86
    в столбцовой форме, 88
    в строчечной форме, 86
    лексикографический ($\mathscr{LD}$-метод), 90
  модифицированный, 57
  первый этап, 51
  прямой, 34, 86
    в столбцовой форме, 62
    в строчечной форме, 34
    лексикографический ($\mathscr{L}$-метод), 44
  с правилом Бленда, 46, 63
Симплекс-таблица
  $\mathscr{LD}$-допустимая, 90
  $\mathscr{L}$-допустимая, 43
  двойственно допустимая, 86
  допустимая, 33, 62
  оптимальная, 37
  столбцовая, 61
  строчечная, 33
Системы линейных неравенств
  двойственные, 95
Стиглер Дж., 23
Столбец направляющий, 35, 63, 87
Строка
  направляющая, 35, 63, 87
  производящая, 128
Сумма множеств, 26

Таккер А. В., 73, 82, 119
Теорема
  Гомори, 135
  двойственности, 73
  Куна–Таккера, 82
Точка
  седловая, 83, 85
  стационарная, 82
Транспортная задача
  в открытой форме, 112

Фалкерсон Д. Р., 121
Фаркаш Ю., 73
Функция
  вогнутая, 14
  выпуклая, 13
  Лагранжа, 82, 83, 85
  целевая, 9
Фурье Ж. Б. Ж., 34

Хачиян Л. Г., 92
Хитчкок Ф., 96

Цена, 55, 56, 70

Шар, 12
Шор Н. З., 92

Эвристика, 39
Элемент направляющий (ведущий), 30, 35
Эллипсоид, 26, 92
Эффект Гиффена, 24

Юдин Д. Б., 92
Юнг Р. Д., 133, 139

Валерий Николаевич Шевченко
Николай Юрьевич Золотых

Линейное и целочисленное линейное программирование

Учебник

Формат 70 × 108 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 9,1. Усл. печ. л. 8,8. Тираж 400 экз. Заказ

Издательство Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского,
603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23.

Типография ННГУ, 603000, Н. Новгород, ул. Б. Покровская, 37.
Лицензия ПД № 18–0099 от 04.05.2001.